DER CHARAKTER DER MATHEMATIK ZWISCHEN PHILOSOPHIE UND WISSENSCHAFT

Michael Otte

I

Philosophie der Mathematik versteht sich traditionellerweise im Sinne einer logischen Grundlagenforschung, die sich im Laufe der Zeit als eine Theorie formaler Strukturen und Verfahren so verselbständigte, daß zweifelhaft wurde, welche Konsequenzen bezüglich der Mathematik daraus zu ziehen wären. (Man denke etwa an die interessante, kontroverse und bis heute keineswegs beendete Diskussion um die Interpretation der Gödelschen Unvollständigkeitstheoreme; (bezogen auf die Mathematik im engeren Sinn vgl. dazu Kolata 1982)). Andererseits entwickelte sich zunehmend ein soziologischer und historischer Zugriff auf die Philosophie der Wissenschaften und der Mathematik. Dabei erwies sich der Fall der Mathematik als Sonderproblem. Einerseits schien die Mathematik, anders als die empirischen Wissenschaften, im Laufe ihrer Geschichte kumulativ absolute oder jedenfalls unveränderliche, objektive, exakte Wahrheiten aufzuhäufen; andererseits wurde sie zunehmend durch Probleme der Lehre, der technischen Anwendungen, oder der sonstigen inhaltlichen Interpretation der mathematisierten Erfahrungsbereiche beeinflußt und ihr ein Relativismus und ein "quasi empirischer" Charakter angetragen. Es entstand beispielsweise in jüngster Zeit, angeregt durch diese Problematik, eine lebhafte, wenn auch erstaunlich kurzlebige Diskussion darüber, ob auch die Geschichte der Mathematik von "Revolutionen" im Sinne von Thomas Kuhn (Kuhn 1967) besetzt sei (M. Crowe 1975, H. Mehrtens 1976, J. Dauben 1981; bezüglich der Ansätze einer Soziologie der Mathematik sh. D. Bloor 1976, H. Bos/H. Mehrtens 1977). Es scheint beinahe trivial zu sein die Frage nach der Existenz "wissenschaftlicher Revolutionen" in der Mathematik, mit der Anwendungsproblematik in einen Zusammenhang zu bringen.

Bezüglich des historischen Sachverhalts selbst charakterisierte E. Nagel das Problem am Beispiel der Geometrie folgendermaßen: "That the truths of geometry are 'necessary' in some sense which is not merely factual or experiential, and that geometry does formulate relations between properties of bodies, were two conclusions which seemed inescapable and at the same time difficult to reconcile. The various philosophies of classical rationalism, classical empiricism, and Kantianism were alternative heroic attempts to establish some sort of uneasy balance between them (Nagel 1979, 195). Ein Beispiel für eine sehr bedeutsame epistemologische Konzeption der reinen Mathematik, die gerade an dieser Stelle Probleme hat, stellt Piagets genetische Epistemologie dar, in deren Rahmen der Zusammenhang von "reflexiver Abstraktion" und "einfacher (empirischer) Abstraktion" defizitär bleibt. Ungelöst bleibt nach Piagets eigenen Worten in seiner Theorie "das Problem der Beziehungen zwischen der deduktiven Mathematik und dem experimentell gegebenen Inhalt: welche Wechselwirkungen entstehen, wenn das Subjekt deduktiv zu überlegen und gleichzeitig zu experimentieren beginnt?" (Piaget 1974, 117).

Im Zeitalter der industriellen Revolution hat sich das Problem dieses Doppelcharakters der Mathematik verschärft infolge einer allgemeinen Entwicklung im Bereich der Wissenschaften, die man als "Bernals Paradoxon" bezeichnen könnte. (J.D. Bernal: "At the time when science should have been most obviously conneced with the development of the machine age, arose the idea of pure science" (ders.: The Social Function of Science, 29)). Diese "Verschärfung" der Problematik äußerte sich darin, daß die klassischen Ansätze zu seiner Lösung, die alle irgendwie in der Vorstellung von Mathematik als einer *Sprache* (Leibniz, Condillac) wurzelten, einerseits unzulänglich wurden und andererseits in verstärktem Maße wieder aufgelebt sind. Während im 18. Jahrhundert die Algebra als universelle Sprache die Mathematik begründen sollte, entstand um die Jahrhundertwende gewissermaßen eine Spaltung in der Philosophie der Mathematik eine Spaltung in ein "linguistisches Paradigma" einerseits und ein "Produktionsparadigma" andererseits (G. Markus 1986). In dieser Situation bietet es sich an, den Begriff des "Mittels" menschlicher Tätigkeit als einen gemeinsamen Bezugspunkt in die Überlegungen einzuführen.

Was die Mathematik angeht, so legen es bereits die populären Vorstellungen derselben, etwa die auffallende Bindung der Mathematik an eine spezialisierte formale Sprache nahe, sie als die Theorie der Möglichkeiten der verschiedenen Mittel menschlicher Tätigkeit zu verstehen. Beispielsweise beschreibt die euklidische Geometrie im Wesentlichen die Möglichkeiten der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal; und das für die Konstitution der reinen

Mathematik in Deutschland grundlegende Programm der "Arithmetisierung" (Kronecker) bezieht sich auf die Zahlen als einem anderen Mittel geistiger Tätigkeit. Oder man denke etwa an die grundlegende Bedeutung des Konzepts der Turing-Maschine. Wenn man eine solche Charakterisierung der Mathematik aufrechterhalten will, dann, so zeigen diese Beispiele deutlich, muß man den Begriff des Mittels hinreichend weit auffassen. Als Mittel in diesem angestrebten umfassenden Sinn wäre alles das zu definieren, welches geeignet erscheint, eine Vermittlung zu einem Objekt, oder Sachverhalt, oder Problem herzustellen, so daß daraus ein gegenständlicher Inhalt mathematischer Tätigkeit resultiert. Beispielsweise wird in der Regel der gegenständliche Gehalt eines Erkenntnisaktes, bezogen auf das Bewußtsein, nämlich als Intentionalität, interpretiert. Da dem Erkenntnissubjekt aber durchaus nicht bewußt zu sein braucht, was seiner Tätigkeit tatsächlich zugrunde liegt, was ihr Motiv und ihren Inhalt ausmacht, entstehen unüberbrückbare Dichotomien, wenn man die Intentionalität nicht als Moment oder Mittel gegenständlicher Erkenntnistätigkeit auffaßt.

Eine derartige Dichotomie betrifft beispielsweise das unverbundene Nebeneinander von Konstruktivismus und Empirismus, das bereits erwähnt worden ist. Theorien werden dann entweder rein attributiv als konstruktiv entworfene Entwicklungsprozesse oder rein referentiell als wörtliche Beschreibungen einer gegebenen Wirklichkeit aufgefaßt. Begriffe werden also entweder intensional oder rein extensional gesehen und dementsprechend entweder mit einer holistischen über den organischen Gesamtzusammenhang der Theorie vermittelten Bedeutungskonzeption, die sich von vorneherein auf eine "ideale" Realität bezieht, oder mit einer empiristischen, atomistischen und theorieunabhängigen Bedeutungsauffassung verbunden. Derartige gegensätzliche Orientierungen sind unvermeidlich (müssen jedoch dynamisch aufgefaßt werden). Insbesondere für die Mathematik ergibt sich einerseits die Notwendigkeit, als gemeinsame Sprache aufzutreten, die geeignet erscheint, reale Verhältnisse in möglichst differenzierter Weise zu erfassen. Andererseits gehört es auch zur Mathematik, in "freien" oder "willkürlichen" Konstruktionen und Entwürfen unrealistisch einfache Modellsituationen zu schaffen, in denen neue Fragestellungen bearbeitet werden können, und die die Wirklichkeit nicht insgesamt zu erfassen trachten, sondern sie in gewissen, für die Tätigkeit wesentlichen Aspekten modellieren. Was wesentlich ist, bestimmt sich einmal in der konstruktiven Tätigkeit und zum anderen im sozialen Verkehr oder, wenn man so will, in der Pluralität verschiedener Tätigkeiten und deren Koordination, nicht zuletzt über Sprache. Wenn die Mittel der Tätigkeit hier ins Zentrum des Interesses gerückt werden, so deshalb, weil die Struktur der Tätigkeit nicht irgendwie abstrakt oder empiristisch beschrieben werden, sondern immer auch aus einer funktionalen Perspektive und zielorientiert betrachtet werden soll.

Im Sinne des hier intendierten Mittelbegriffs gehören theoretische Begründungen, grundlegende Weltanschauungen oder philosophische Vorstellungen ebenso zu den Mitteln der Tätigkeit, wie etwa Kalkül und Symbolsprache der Algebra oder die algorithmischen Prozeduren der Geometrie von Zirkel und Lineal. Es kann von einer solchen Auffassung her dann angestrebt werden, in theoretisch-kategorialer Weise die Struktur der wissenschaftlichen Tätigkeit auf der Grundlage des Systems der Mittel zu beschreiben (vgl. Judin 1978, Teil 3).

Grundsätzlich kann die Entwicklung der Erkenntnis sowohl in ihren sozialhistorischen wie auch in ihren individuellen Aspekten auf der Grundlage des Konzepts der Tätigkeit in diesem beschriebenen Sinne modelliert werden, gerade auch in ihren Widersprüchlichkeiten. Insbesondere für die Mathematik ist die Frage des Verhältnisses von "innen" und "außen" bedeutsam. In der Entscheidung darüber, ob die Kommunikation und andere soziale "Anwendungen" der Mathematik Tätigkeiten sind, die ebenso mathematische Gegenstände schaffen können, wie das die professionelle Aktivität des kreativen Forschers vermag, führt entweder zu der Ansicht, daß die Mathematik eine von der gesellschaftlichen Gesamtentwicklung im besonderen Maße abhängige, weil auf die Vielfalt und Differenziertheit der inhaltlichen Aktivitäten angewiesene, Wissenschaft ist, oder umgekehrt aufgrund ihres "formalen" Charakters von gesellschaftlichen und historischen Zusammenhängen in besonderer Weise losgelöst erscheint, oder zu der Vorstellung, daß, so paradox das klingt, sogar beides in einander ausschließender und ergänzender Komplementarität gilt. Es soll also mit dieser Orientierung am Tätigkeitssystem nicht der Eindruck erweckt werden, als würde damit eine universale Synthese und Harmonisierung aller Aspekte mathematischer Erkenntnis angestrebt werden. Die empirische Spezifikation und Anwendung dieses Konzepts und, die konkrete Beschreibung wird möglicherweise im Einzelfall die genannten Aspekte, den sozialhistorischen und den individuellen, als durchaus unterschiedlich oder sogar widersprüchlich erweisen. Man könnte etwa unter wissenssoziologischen Interessen versuchen, die Betrachtung zu symmetrisieren und statt der Relation "Mittel/Gegenstand" gerade die letztere Differenz "Individuum/Gesellschaft" in den Mittelpunkt rücken. Da ich primär philosophische Interessen verfolge, tue ich das hier nicht.

Eine für die philosophische Betrachtung der Mathematik überaus wichtige "widersprüchliche Einheit" in diesem Sinne betrifft das Verhältnis von (philosophischem) Weltbild und (technischer) Operativität in der Mathematik. (Scherzhaft wird oft gesagt, daß die Mathematiker wochentags Platonisten und sonntags Formalisten seien (vgl. Davis/Hersh 1981, 321 f., vgl. auch Ch. Castonguay 1972)). In der Terminologie der vorliegenden Arbeit handelt es sich dabei gewissermaßen um das Verhältnis der Mittel auf der höchsten, allgemeinsten Ebene einerseits und zu denen auf dem präzisesten und konkretesten Niveau andererseits. Gerade dieses Verhältnis stand während der gesamten industriellen Revolution, insbesondere in den auf mathematischer Seite vor allem von Felix Klein geführten Auseinandersetzungen zwischen Mathematik und sogenannter Technikerbewegung zum Ende des 19. Jahrhunderts, ebenso im Mittelpunkt des Interesses, wie das bereits genannte umfassendere Problem der Beziehungen zwischen den sozialen und den individual-psychologischen Aspekten mathematischer Entwicklung. In der vorliegenden Arbeit soll diese philosophische Problematik der Mathematik dadurch aufgenommen werden, daß sie die "Autonomisierung" und theoretische Verselbständigung der reinen Mathematik während des 19. und 20. Jahrhunderts im Selbstbild des Erkenntnissubjekts als eines (potentiell) universalen und aktuell begrenzten Wesens begründet sieht und in diesem Zusammenhang dann die Mittel mathematischer Tätigkeit als Mittel der Tätigkeit eines sowohl universalen, wie begrenzten Subjekts versteht.

Das Cantorsche Diagonalverfahren geht beispielsweise von der tatsächlichen Herstellbarkeit einer unendlichen Liste der abgezählten Objekte aus, worin sich der Doppelcharakter des Subjekts direkt ausdrückt. (Die Abzählung ist gebunden an die Mittel für die Erstellung der Liste, andererseits handelt es sich um eine "*unendliche*" Liste). In diesem Sinne wird einerseits das mathematische Denken durch die "Endlichkeit des Menschen allererst ermöglicht" (O. Becker 1959, 158) und erscheint andererseits das idealisierte unendliche Subjekt als "erkenntnistheoretischer Grenzbegriff" (Husserl) jeder Philosophie der Mathematik. Insbesondere die zentralen Begriffe jeder Epistemologie der Mathematik verweisen auf diese Dualität. Beispielsweise erscheint die Behauptung einer absoluten intuitiven Selbstevidenz nur unter der Annahme eines transzendentalen Subjekts sinnvoll, eines Subjekts, dessen Struktur nach Kant die Erkenntnis determinieren soll. Auf der anderen Seite ist für das empirische Erkenntnissubjekt jede Evidenz eine vermittelte und relative. Das Interesse an einer derartigen Intuition ist also nur dort gegeben, wo sich eine Entwicklungsrichtung und ein Entwicklungshorizont dafür angeben lassen.

Diese Doppelcharakterisierung des Subjekts verweist implizit auf die grundlegende Bedeutung des Entwicklungsgedankens und auf die Tätigkeit als System der Entwicklung des Subjekts. Die Evolution des Menschen ist nicht mit Darwin abgeschlossen. Insbesondere die mit der sogenannten Computerevolution zusammenhängenden Probleme unseres Selbtverständnisses verlangen neue Entwicklungsvorstellungen. Es ist ein bemerkenswertes Faktum, daß die Mehrzahl der philosophischen Reflexionen von Kant über Husserl bis auf unsere Tage (vgl. Kitcher) so unterschiedlich sie in anderer Hinsicht auftreten mögen, doch das Subjekt immer im Sinne eines idealisierten, gleichsam "transzendentalen" Subjekts einführen. Insofern dabei ein bestimmter Horizont der Verallgemeinerung nicht nur allgemein vorgestellt, sondern spezifisch fixiert wird und die Philosophie gewissermaßen "objektiven" Charakter im Sinne einer Einzelwissenschaft hoher Allgemeinheit erhält, wird damit eigentlich die Entwicklungsperspektive abgeschnitten. Es scheint mir, daß dabei insbesondere der genuin philosophische Charakter des Nachdenkens über Mathematik eliminiert wird. Es muß dieser Entwicklungshorizont des Subjekts notwendig unendlich und offen gedacht werden.

Eine solche Entwicklung kann nur durch die gegenständliche menschliche Tätigkeit selbst herbeigeführt werden. Dazu müßte das transzendentale Subjekt als ein System aufgefaßt werden, welches man als Gesellschaft oder als kollektives Subjekt bezeichnen könnte als etwas, das entgegen den klassischen philosophischen Auffassungen der Selbstreflexion des individuellen Bewußtseins nicht vollständig zugänglich ist, sondern eher in der Differenz zu diesem als Umwelt o.ä. existiert. Es gäbe dementsprechend dann auch bestimmte Tätigkeitsformen, etwa Kommunikation, die nur bezogen auf das soziale System und nicht bezogen auf das individuelle Subjekt einen Sinn machen. Was also in einer statischen Konzeption des Gegenstands oder einer entsprechend statischen Auffassung des Subjekts als Dichotomie oder Zusammenhanglosigkeit erscheint, muß durch die Tätigkeit in Wechselwirkung gebracht werden können. In der Tätigkeit, und aus der Sicht der Tätigkeit, erscheint dann das Subjekt als einerseits konkret begrenzt und andererseits unbegrenzter Entwicklung fähig. Wodurch geschieht diese Entwicklung? Dadurch, daß die Tätigkeit Mittel und Gegenstand in einen Zusammenhang bringt. Ein "Mittel" ohne Gegenstand ist für das Subjekt nur Begrenzungshorizont. Umgekehrt ist jede gegenständliche Erkenntnis, jede Beziehung auf einen Gegenstand vermittelt und relativ, was oben bereits am Beispiel des Problems der intuitiven

Selbstevidenz angesprochen worden war.

Tatsächlich erscheinen die Mittel der Tätigkeit einerseits als Grundlage der Möglichkeit, potentiell unbegrenzter Entwicklung. Andererseits wird das Subjekt aktuell auch immer durch die verfügbaren Mittel beschränkt. Die große Dynamik mathematisierter Erkenntnis rührt zweifellos aus diesem doppelten Charakter der Mittel menschlicher Tätigkeit her. Es handelt sich hier eigentlich um einen Gegenstand-Mittelprozeß, denn die Mittel werden erst als Vermittlungen der Beziehungen des Subjekts zu einem Gegenstand zu Mitteln. In diesem Sinne konnte sich die reine Mathematik historisch erst verselbständigen, als es ihr auf der Grundlage verallgemeinerter Interaktionen zwischen Zahl und Raum, Arithmetik und Geometrie gelungen war, einen solchen einheitlichen Mittel–Gegenstandsprozeß in hinreichender Dynamik in die Wege zu leiten. Es ist in diesem Sinne einseitig, wenn die Philosophie und Geschichtsschreibung der Mathematik die Herausbildung der reinen Mathematik im 19. Jahrhundert im Sinne der Auffassungen von Cantor und Hilbert als einen Prozeß der "De–Ontologisierung" beschreibt. Es wäre auf das komplementäre Element einer Reontologisierung, einer neuen Gegenständlichkeit hinzuweisen, was bereits Hegel gegen Kant und Fichte gewendet als Problem eingeklagt hatte (vgl. M. Otte 1986a), und was für Hilbert selbst eine große Rolle gespielt hat.

Kann nicht jeder intuitiv, d.h. aus sich selbst heraus, erfaßte Gegenstand zum Mittel der Tätigkeit werden, da der Mensch ein, der Möglichkeit oder dem Ziel nach, universales Wesen ist, und muß nicht im Sinne dieses Anspruchs auch umgekehrt jedes Mittel zum Gegenstand der Analyse mit dem Ziel der Erweiterung der Möglichkeiten des Subjekts werden? Was sich hier herausschält, ist die Tatsache, daß auch der Erkenntnisgegenstand in einer solchen Dualität von Universalität und Bestimmtheit betrachtet werden kann. Beispielsweise ist für die Herausbildung der theoretischen Mathematik im 19. Jahrhundert die Einsicht entscheidend gewesen, daß der Gegenstand auf seiner allgemeinsten Ebene (die "Idee" oder der "Begriff") amodal ist, obwohl die Mathematik gleichzeitig zunehmend auch technisiert werden mußte. Die sich herausbildende reine Mathematik, insbesondere die Mathematik im Sinne Cantors, bezieht einen Begriff auf die Gesamtheit aller Repräsentationsmodalitäten unter Relativierung des Zusammenhangs mit jeder besonderen Darstellungsweise oder Beschreibungsmodalität. Die Differenz von Intension und Extension ist für jede Bedeutungstheorie der Mathematik essentiell.

Darüber hinaus tritt jeder beliebige mathematische Begriff, etwa der Begriff der "Gruppe", oder der "Funktion", oder der

"Wahrscheinlichkeit" usf. sowohl als Gegenstand (Definition) wie als Mittel (methodologische Orientierung) der mathematischen Untersuchung auf. Wir führen einen solchen Begriff auf andere Dinge zurück, definieren ihn durch seine Eigenschaften usf.; oder wir fassen ihn, z.B. im Sinne der "impliziten Definition" des axiomatischen Denkens, als durch sich selbst definiert auf und gewinnen seine "Bedeutungen" durch seine Rolle als Mittel des Denkens.

Es wird hier in Ansätzen deutlich, wie gerade Mathematik und mathematische Logik in der Ausbildung einer solchen Dialektik von "Erklärung durch anderes" versus "Erklärung durch sich selbst" mit der Problematik einer "Subjekt-Philosophie" verbunden ist. Auch letztere besteht darin, zu sehen, daß das Subjekt einerseits durch die Summe seiner Eigenschaften (also "endlich") bestimmt ist und andererseits eben Subjekt ist, d.h. mehr ist, als die Gesamtheit seiner beschreibbaren Eigenschaften. Gerade in jüngster Zeit ist diese "Subjekt-Problematik" im Zusammenhang der Diskussionen um die "Grenzen künstlicher Intelligenz" für die Philosophie der Mathematik aktuell geworden (Otte 1985, 163).

Man sagt beispielsweise, im Turing-Test hätte "kein existierender Computer eine Chance, da gerade sprachliche Kompetenzen auf gesundem Menschenverstand beruhen". Andererseits hat J. Weizenbaum bereits 1964 ein Programm "Eliza" geschrieben, das, obwohl relativ primitiv, dennoch in funktionaler Hinsicht von vielen Menschen als durchaus gleichwertig einem Gespräch mit ihrem Psychotherapeuten empfunden wurde. "Ich konnte bestürzt feststellen, wie schnell und wie intensiv Personen, die sich mit "Eliza" unterhielten, eine emotionale Beziehung zum Computer herstellten, und wie sie ihm eindeutig menschliche Eigenschaften zuschrieben" (Weizenbaum 1977, 19). Umgekehrt erreicht der Computer in seinen Berechnungen und Deduktionen oft eine solche Differenziertheit und Komplexität, daß wir uns mit einer bloß funktionalen Bewertung der von ihm gelieferten Ergebnisse bescheiden müssen, was dann auch sehr oft als unbefriedigend empfunden wird (Davis/Hersh 1981, 384).

Es ist eine traditionelle und von alters her gefestigte Überzeugung der Mathematiker gewesen, daß der besondere Charakter der Mathematik ihre Exaktheit, Klarheit, Objektivität usf. in der Tatsache einer Einheit von Konstruktion und Einsicht, von Operativität und Inhaltlichkeit gründen, auch wenn sich diese Einheit im Laufe der Mathematikgeschichte zunehmend auf formale Metaebenen verlagert hat. (Hilbert war bekanntlich in der Meta-Mathematik Intuitionist und hat die formale Logik eine inhaltliche, weil selbstevidente Logik genannt.) Um diese angestrebte Einheit in der Zeit bzw. in der sozialen Kommunikation und Arbeitsteilung zu stabilisieren, bedarf es der Zeichen, der Symbole und der Sprache, wie gegen den Cartesianismus gewendet, sowohl Condillac als auch Kant, aus sonst ganz unterschiedlichen epistemologischen Perspektiven heraus, betont haben.

Die Sprache als Dualität von Zeichen und Bezeichnetem zerstört, je nachdem welche Subjektvorstellung man zugrundelegt, entweder diese Einheit oder etabliert sie als eine bloß ideale symbolische Einheit, die das Band zur materiellen Realität zerschneidet. Das Erkenntnisproblem unterliegt in jedem Fall einem unendlichen Regreß. Das wissenschaftliche Denken thematisiert die Frage des Wesens der Dinge, wie auch das Problem des reflexiven Rückbezuges der Erkenntnis als einen unendlichen Prozeß, als dauernden Übergang von einer Fixierung zu einer anderen. Umgekehrt ist jede derartige Fixierung, jeder einzelne Fakt theoretisch, d.h. eingebettet in eine Gesamtentwicklung. In der Tätigkeit realisiert sich diese Entwicklung als Mittel-Gegenstandsprozeß und zwar in einem doppelten Bezug nach der subjektiven wie der sozialen Seite hin.

Ich möchte versuchen, dies am Beispiel der traditionellen Verfahren der Mathematik, die aus dem eingangs erwähnten "Sonderproblem" der Mathematik, ihrem Schwanken zwischen idealem Konstruktivismus und epistemologischen Empirismus, hervorgegangen sind, zu illustrieren. Auf den ersten Blick erscheint einem, wenn man sich die beiden wichtigsten Verfahren in der Mathematik, die axiomatische Methode und die genetisch-konstruktive Vorgehensweise, vergegenwärtigt, an der ersteren zunächst der begrenzende Charakter des Mittels, während das genetische Verfahren eher die Freiheit universaler und nicht antizipierbarer Möglichkeiten suggeriert. Tatsächlich ergibt die Axiomatik eine Begrenzung, indem sie den Gegenstand der Betrachtung in ein System von definitorischen Beschreibungen verwandelt, indem sie gewissermaßen Wirklichkeit und Wissen, Landschaft und Landkarte identifiziert. Erst der "Anwender", der eine axiomatisierte Theorie als Modell und im Sinne eines explorativen Mittels benutzt, gewinnt Zugang zu einer Reflexion der evolutionären Aspekte der axiomatischen Beschreibung. Indem ein Horizont bezeichnet wird, kann dieser überschritten werden. Indem etwas ausgegrenzt und beschrieben wird, werden auch Alternativen verfügbar. (Vgl. in diesem Sinne auch H. Wang 1981, 15/16: formal system vs. formal thinking). Das heißt, die Axiomatik im Sinne der Cantor-Hilbertschen Mathematikauffassung ist eher ein Mittel des sozialen Systems, während sie der individuellen Selbstreflexion eher als Ausdruck einer syntaktisch-formalen Auffassung von Mathematik erscheint. (Vgl. die analoge Bewertung der "Grundlagenkrise" der Mathematik durch H. Weyl 1968, Bd.IV, 334).

Die Axiomatisierung verwandelt eine Theorie in eine Meta-Theorie. Die Mathematik liefert eigentlich keine Theorien eines empirischen Bereichs, sondern Meta-Theorien, d.h. Theorien von Theorien zum Zwecke methodologischer Orientierung. Insofern eine mathematische Theorie in axiomatischer Form auftritt, ist dies auch eine mögliche und offensichtliche Auffassung. Wenn Theorien Beschreibungen eines Gegenstandsbereichs sind, dann sind Axiomensysteme offensichtlich Beschreibungen von Theorien. Man erstellt sie in der Regel nicht deshalb, um tatsächlich die Theorie aus diesem Axiomensystem durch formale Deduktionen zu rekonstruieren, sondern um die Beschreibung eines Gegenstandsbereichs, d.h. die Theorie, für den Menschen überhaupt übersichtlich und als Mittel verfügbar zu machen.

Insbesondere seit wir durch Gödel wissen, daß Axiomensysteme nicht vollständig sein können, ist der andere Standpunkt, welcher Axiomensysteme als Deduktionsgrundlagen für mathematische Theoreme betrachtet, nur eingeschränkt haltbar. Unter Umständen führt der axiomatische Standpunkt zu einem Konservativismus, wie er sich in der Suche nach "absoluten Grundlagen" der Erkenntnis oder in der einseitigen Bevorzugung einer Kohärenztheorie der Wahrheit gegenüber einer Korrespondenztheorie derselben ausdrücken mag. Konservativ sind derartige Interessen, insofern sie den Entwicklungsaspekt dadurch abschneiden, daß sie die "aktive Rolle" der Erkenntnisgegenstände ignorieren oder umgekehrt, vergessen, daß Gegenstände stets solche der Tätigkeit sind. Das Objekt wird entweder durch eine festgelegte Anschauung desselben ersetzt, und die Mathematik unterliegt einer Art verallgemeinerter Geometrisierung, wie sie in der Cantorschen mengentheoretischen Grundlegung derselben zum Ausdruck kommt, und wie sie in ihrer Problematik und Widersprüchlichkeit erst in diesem Jahrhundert durch die Arbeiten von Turing, Post u.a. wirklich deutlich geworden ist, oder das gegenständliche Moment verschwindet in der bloßen Widerständigkeit einer unbegriffenen Wirklichkeit. Damit bin ich aber bereits in die Charakterisierung der anderen Verfahrensweise der Mathematik, nämlich des algorithmischen oder genetisch-konstruktiven Vorgehens, hinübergeglitten. Dessen latente Zwänge werden viel weniger deutlich empfunden (vgl. dazu Beth/Piaget 1966, 15, sowie M. Otte 1986b, 58-70). Arithmetische Beschreibungen erscheinen gleichzeitig als möglicherweise abstrakt und als dennoch direkte Zugänge zu einer Sache. Die empiristisch ausgerichtete "Bewegung der

Strenge", die sich ebenfalls im 19. Jahrhundert herausgebildet hatte und die eher die arithmetischen Beschreibungen bevorzugt, ist bereits durch den Charakter ihres Interesses gezwungen, die mathematische Beschreibung realer Phänomene so detailliert und so eng am empirischen Objekt zu suchen wie möglich. Diese "Bewegung der Strenge", indem sie dabei das Erkenntnissubjekt gewissermaßen LaPlace' "unendlicher Intelligenz" annähert, verstrickt sich in Probleme der Komplexität, der Zufälligkeit und Unüberschaubarkeit des Wissens bzw., wie man es genannt hatte, in eine "Krise der Anschauung". Indem sie vergißt, daß jedes Wissen unbedingt ein Subjekt des Wissens voraussetzt, ignoriert auch sie schließlich die Tatsache, daß die Tätigkeit der realen Subjekte in ihrer Struktur nicht durch die Mittel an sich, sondern durch die tatsächlichen Vermittlungen zwischen Subjekt und Gegenstand definiert ist, und daß diese Vermittlungen sehr wesentlich sozial determiniert sind. Der Zahlbegriff erscheint dagegen in der Regel als "der unmittelbare Ausfluß der reinen Denkgesetze" (Dedekind), die andererseits durch ihn direkt zugänglich zu sein scheinen. Das Subjekt versteht sich in der Illusion dieser unmittelbaren Transparenz tatsächlich als unendlich und "frei". Strenge und Präzision der Mathematik werden in diesem Sinne als die subjektive Fähigkeit zum logischen und strengen Denken aufgefaßt. Dies führt zu dem widersprüchlichen Sachverhalt, daß bestimmte algorithmische Verfahren, etwa die vollständige Induktion, eine viel strengere und unbedingtere Objektivität zu besitzen scheinen, als alle geometrischen Axiome - Poincaré glaubte beispielsweise, daß es sich bei der Induktion um eine synthetische Intuition a priori handelt, die nicht disponibel wäre, wie jedes geometrische Axiom es ist, und daß sie gleichzeitig frei verfügbar in ihrer Betätigung seien, so daß man derartige Verfahren nicht als Axiome bezeichnen könne. Es ist dies ein Grund dafür, daß vielen Mathematikern eine axiomatische Charakterisierung der Zahlen als überaus "unnatürlich" erschienen ist und eine Beschreibung von "Berechenbarkeit" sich erst in diesem Jahrhundert eingestellt hat.

II

Die Tätigkeit selbst hat, und dies zeigt sich im Doppelcharakter der Mittel der Tätigkeit, einen widersprüchlichen Charakter. Sie ist gekennzeichnet durch eine Dualität von Rezeptivität und Gegenständlichkeit einerseits und von Aktivität und Intentionalität andererseits. Des weiteren muß das Tätigkeitssystem bezogen auf die Einheit in der Differenz zwischen Individuum und Gesellschaft strukturiert werden. Jedenfalls dann, wenn es als ein System der Erkenntnismittel aufgefaßt wird. In der Wissenschaftsgeschichte treten diese Probleme als Theorie-Praxis-Problem (Cantor selbst glaubte nicht an dieselbe Freiheit für die angewandte Mathematik, wie sie die reine Mathematik auszeichnen sollte (Cantor 1883/1980, 183)) und als Wechselwirkung zwischen einzelwissenschaftlichen und philosophischen Aspekten des Denkens in Erscheinung.

Die Einzelwissenschaften wollen den "Gegenstand an sich" zum Sprechen bringen, sind an seiner Kenntnis als eines äußerlich unabhängigen Gegenstandes und an den kausalen Bedingtheiten dieses Gegenstandes durch andere Gegenstände interessiert. Das bedeutet, daß sich das wissenschaftliche Denken im eigentlichen Sinn den Gegebenheiten anzupassen sucht, der Form der objektiven Zusammenhänge zu folgen sucht, kurz: daß es gegenständlich ist. Es sucht Objektivität. Es vermeidet alle subjektiven Voraussetzungen. Wissenschaftliche Erkenntnis kann, anders denn mystische Weisheit, von jedermann gewonnen werden, ohne daß besondere Selbstveränderungen von ihm gefordert wären. Auf der anderen Seite bleibt die Tätigkeit als Ganzes aktiv, insofern sie zielgerichtet ist, d.h. das Vermögen besitzt, potentiell alles zu ihrer Grundlage zu machen, alles sich anzueignen. Diese Universalität des Vermögens ist natürlich nur ein Idealbild, und die aktive Seite der Tätigkeit ist nicht von ihrer rezeptiven zu trennen. In unserem Denken von Kant über Husserl bis zur Gegenwart (vgl. etwa Kitcher), ist diese aktive Seite immer mit der philosophischen Reflexion verbunden gewesen, die Ausdruck eines idealisierten Subjekts ist, das die Möglichkeit menschlicher Erkenntnis überhaupt zum Ausdruck bringt. Realistische Bedeutung hat eine so geartete Philosophie nur in komplementärer Ergänzung zur Mathematik, als einem Ausdruck der "Endlichkeit" des Subjekts. Es erscheint dann in einer solchen Polarität diese Unendlichkeit des Subjekts nicht als aktual, sondern als potentiell, als prinzipiell unbegrenzte Entwicklungsmöglichkeit, als Wahrheitssuche. Wahrheit schließt die Selbstveränderung des Subjekts ein. Die Philosophie könnte dann nicht mehr einfach als allgemeine Theorie aller Wissenschaft, als bloß in Verallgemeinerung bestehend gesehen werden. Anders gesagt, gerade die Tatsache der Verallgemeinerung und der damit verbundenen Ablösung von den mehr oder minder konkreten Tatsachen, die sie hervorgebracht haben, zeigt den philosophischen Charakter einer allgemeinen Idee als Ausdruck eines bestimmten Verständnisses des Subjekts und führt die Idee damit in einer neuen Weise in die Selbstreflexion und soziale

Tätigkeit ein. "So seltsam das auch scheinen mag, aber gerade die zur philosophischen Form geführte Idee, von der man annehmen könnte, sie sei von ihren unmittelbaren Wurzeln und den sozialen Ursachen ihrer Entstehung sehr weit entfernt, gerade sie offenbart erst, was sie will, was sie ist, aus welchen sozialen Tendenzen sie hervorging ..." sagt Wygotski in seinen methodologischen Überlegungen (ders. 1985, Bd. I, 76). Die Philosophie hat somit auch ihre Probleme, nicht nur ihre Intentionen und Utopien. Aber es wäre ein Irrtum zu glauben, sie könnte dieselben "lösen" im Stile einer Wissenschaft und lediglich auf einem Niveau höherer Verallgemeinerung.

Dieses ideale, gleichsam unendliche Subjekt ist an die Stelle getreten, die im Ontologismus der klassischen rationalistischen Philosophie der Gottesbegriff eingenommen hatte. "Es geht dabei um die Verschiebung von einer Philosophie, die auf einen absoluten Garanten ausgerichtet war, der in der Metaphysik von Descartes oder Leibniz Gott hieß, auf eine Philosophie des Subjekts, das man als Wille begriff" meint der französische Philosoph Jean-Francois Lyotard. Insbesondere Cantor bringt dieses philosophische Selbstverständnis deutlich zum Ausdruck. (Man denke auch an Hermann Weyls Charakterisierung der Mathematik als die "Wissenschaft vom Unendlichen" und an sein Schwanken zwischen intuitionistischer und formalistischer Auffassung der Mathematik (H. Weyl 1966, 89)).

In jedem Fall orientiert sich die philosophische Grundlegung der Mathematik bis zu Husserl (Die Krisis der europäischen Wissenschaften ...; vgl dazu auch P.P. Gajdenko 1987, 65) an den Möglichkeiten eines "transzendentalen, unendlichen Subjekts". Dabei handelt es sich um Möglichkeiten, die dann von der Wissenschaft in einzelnen Entwicklungen realisiert werden. Die Philosophie hat die Form an sich zum Ziel, während die Wissenschaften der Explizierung und Ausgestaltung bestimmter Formen dienen. Die erstere zielt auf Zusammenhang, die Wissenschaften auf Differenz.

Der Zusammenhang der Theorie-Praxis-Problematik und die Wechselwirkung philosophischer versus objektiver Aspekte von Wissenschaft ist also in der Mehrzahl der Fälle "idealistisch" im Sinne des genannten Subjektbegriffs gestaltet worden. Das drückt sich auch ganz deutlich im Humboldtschen, der Bildung verpflichteten Wissenschaftsbegriff aus. Wissenschaft als Bildung entspringt derselben Sehnsucht nach Verfügbarkeit über das Dasein, der auch die Technologie entspringt. Wissenschaft als Bildung ist aber nur möglich, so bereits die Einsicht Humboldts, wo das Subjekt in einen offenen Horizont hinein gedacht wird und nicht als konkrete, immer beschränkte Gegenwart, auf die sich Technik zu konzentrieren hat. Wenn allerdings das Subjekt *nur* in seiner Universalität gesehen wird, gewissermaßen jenseits einer Entwicklungsdialektik von Begrenzung und Universalisierung, dann entsteht ein Gegensatz zwischen Philosophie und Technik.

III

Es ist als fundamentale Leistung Kants angesehen worden, daß er den Unterschied zwischen der Mathematik und den empirischen Wissenschaften getilgt hat, und einen einheitlichen Begriff von Wissenschaft geschaffen und damit das Verhältnis von Philosophie und Wissenschaft, von Möglichkeit und Faktizität der Erkenntnis ins Zentrum der Betrachtung gerückt hat, allerdings auf Kosten des "Dinges an sich". Oder wie Husserl es ausdrückt, "Kant, indem er die Mathematik mit den Tatsachenwissenschaften auf eine Stufe stellt, schreitet genau besehen, zum vollen Skeptizismus fort" (Husserliana Band XXI, 223).

Diese neue Grenzziehung begründet die positiven Wissenschaften insgesamt in der Endlichkeit des Erkenntnissubjekts und stellt sie andererseits einer Philosophie gegenüber, die durch die Aufgabe einer Erkenntniskritik analytischer Art definiert sein soll und die ihre Grundlagen nicht im empirischen Bewußtsein, sondern in einem "unendlichen" transzendentalen Subjekt finden sollte. In dem Maße, in dem Kant den konstruktiven Charakter der Erkenntnis betont, benötigt er die Konzeption des transzendentalen Subjekts, um die Identität des Wissens in der Differenz zur Unwissenheit bzw. die Einheit der konzeptionellen Konstrukte zu erreichen.

Die Konzeption Kants entspricht der historischen Entwicklung ebenso sehr - etwa der fortschreitenden Spezialisierung und Arbeitsteilung auch im Bereich der Erkenntnisproduktion (vgl. in diesem Sinne Franz Schnabel, Deutsche Geschichte im 19. Jahrhundert, Bd. III) - als sie ihr in der Trennung von Entwicklung und Begründung des Wissens umgekehrt widerspricht. Ein Wissen, das nicht mehr durch ein zweifellos in der Anschauung gegebenes Objekt determiniert wird, sondern Konstruktion eines Erkenntnissubjekts ist, bedarf sowohl der Vergewisserung der gegenständlichen Grundlagen der zugrunde liegenden Perspektiven und Interessen wie auch der Selbstvergewisserung dieses Subjekts.

Hegel und auch Schelling kritisieren die Kantische Spaltung von Philosophie und Wissenschaft, indem sie das Problem der Gegenständlichkeit der Erkenntnis ins Zentrum rücken und Kant

Inkonsequenz in der Verfolgung seiner Einsicht in den konstruktiven Charakter menschlicher Erkenntnis vorwerfen. "Die kritische Philosophie machte zwar bereits die Meta-Physik zur Logik, aber sie ... gab ... aus Angst vor dem Objekt den logischen Bestimmungen eine wesentliche subjektive Bedeutung; dadurch blieb sie zugleich mit dem Objekt, das sie floh, behaftet und ein Ding-an-sich, ein unendlicher Anstoß blieb als ein Jenseits ... übrig" (Hegel, Wissenschaft der Logik I, 1969, 45).

Keine der beiden Auffassungen zum Verhältnis von Philosophie und Wissenschaft hat sich universell durchgesetzt. Es hat allerdings insgesamt eine Verlagerung all jener Gegensätze und Dichotomien, die schon das 17. und 18. Jahrhundert beschäftigt hatten, von der individuellen auf die gesellschaftliche und damit auch in der Erkenntnistheorie vom individuellen Erkenntnissubjekt auf den sozial-historischen Wissensprozeß stattgefunden. Dabei hat sich zunehmend das Problem gestellt, daß auch das Sprechen über Mathematik eine Art Tätigkeit ist, und daß es, wie jede Kommunikation, Gegenstände der Tätigkeit schafft.

Das Denken des klassischen Rationalismus ist gekennzeichnet von einem unvermittelten Hin- und Herschwanken zwischen rein formaler Kalkulation und grundlegenden metaphysischen Prinzipien, wie dem Leibnizschen Kontinuitäts-prinzip oder dem Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren usf. Gewissermaßen bestand ein unvermitteltes Nebeneinander zwischen den Problemen der Repräsentation der gesamten natürlichen Ordnung einerseits und den technischen Aspekten dieser Repräsentation, den Problemen der Darstellung dieser Ordnung andererseits. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts war diese Gesamtsituation nicht mehr akzeptabel; die einzelnen Wissenschaftsdisziplinen trennten sich mehr oder weniger voneinander und begründeten dadurch neue Beziehungen zueinander. Indem Erkenntnis von nun an untrennbar mit den eigenen Handlungsgrundlagen des Erkenntnissubjekts verbunden ist und es keine wahren Gesetze der Wirklichkeit an sich gibt, kann die Wissenschaft der philosophischen Reflexion als Mittel der Subjektentwicklung nicht entbehren. So jedenfalls eine Sicht der historischen Situation, die auch heute noch geeignet erscheint, der Philosophie eine reale Funktion zuzugestehen. Schelling und Hegel haben diese Sicht zu radikalisieren versucht, indem sie Philosophie und Wissenschaft auf der Grundlage der Philosophie als einen einheitlichen, unteilbaren Prozeß darzustellen versuchten. Dies hat auf seiten der positiven Wissenschaften, insbesondere der Mathematik, heftige Gegenreaktionen hervorgerufen und hat sehr oft den "älteren" Standpunkt in extremer Weise hervorgetrieben. Dieser ältere Standpunkt nimmt genau die umgekehrte Haltung ein: Gesetze beschreiben nur eine vom Menschen nicht beeinflußte, rein objektive Wirklichkeit. Oder wie Diderot sich ausdrückte: in der Wirklichkeit hat alles seine notwendige Ordnung, lediglich das menschliche Subjekt ist mit Unsicherheiten, Freiheiten, Alternativen, kurz mit Bewußtsein, begabt. Daher muß die wissenschaftliche Erkenntnisproduktion objektiviert, vom Subjekt getrennt werden. Wiederum ist es ein und dasselbe Phänomen, welches Wissenschaft und Philosophie zugleich trennt und verbindet.

Mit dem Ende des 18. Jahrhunderts endet auch der klassifikatorische Zugriff auf die Wissenschaften, und diese, bzw. der Begriff von Wissenschaft bestimmen sich in Zukunft im Verhältnis zur Philosophie. "An die Stelle philosophischer Enzyklopädien treten seit Hegel Enzykopädien der Philosophie, die die anderen Wissenschaften nur noch in ihren Berührungspunkten mit der Philosophie aufnehmen", schreibt Stichweh (vgl. Stichweh 1984, 8) und zwar in dem Bemühen der Bestimmung des Begriffs der Wissenschaft, und nicht in der Aufzählung einer Pluralität von Wissenschaftsbereichen. Stichweh meint sogar, "daß man es in der Wissenschaft zunehmend mit einem selbstreferentiell geschlossenen System zu tun hat, das man noch beobachten, aber nicht mehr durch externe Zugriffe - und seien es die der Philosophie - ordnen kann. Disziplinäre Differenzierung ... ist ein Mechanismus der Selbstorganisation des Systems, der externe ordnende Zugriffe ersetzt" (a.a.O., 13). Diese stark an der "individualistischen" Selbsteinschätzung der Wissenschaftsdisziplinen im 19. Jahrhundert ausgerichtete Sichtweise erscheint nicht mehr ganz ausreichend, wenn man die Probleme der heutigen Mathematik analysieren möchte. Mathematik heute ist nicht mehr identisch mit der reinen oder theoretischen Mathematik als Universitätsdisziplin, sondern die Probleme der Mathematik sind nur dann zu entschlüsseln, wenn die Rolle des formalisierten Wissens in unserer Gesellschaft insgesamt analysiert wird.

Statt einer enzyklopädischen Ordnung der Wissensgebiete entstand im 19. Jahrhundert das Problem der Bestimmung der Wissenschaftlichkeit irgendeines Bereiches geistiger Aktivität und somit das Problem der Beziehung dieses Bereiches zur Philosophie und zum philosophischen Denken. In Grassmanns "Ausdehnungslehre" ist die Situation, bezogen auf die Mathematik, perfekt ausgedrückt.

Natürlich haben nicht alle Mathematiker begonnen, philosophisch zu argumentieren, im Gegenteil, die Mathematik verselbständigte sich, es entstand der Begriff der reinen Mathematik. Im Prinzip sind aber Trennung oder Separation einerseits und Beziehung oder Interaktion andererseits zusammengehörige Phänomene. Einen generellen, wenn auch impliziten Ausdruck dieser Situation kann man in der Suche nach einem "begrifflichen" Denken in der Mathematik sehen. Es ist ja auffallend, daß ein beträchtlicher Teil der heutigen Mathematikgeschichtsschreibung dieser Epoche einer Rekonstruktion der Genesis grundlegender Begriffe wie des Funktionsbegriffs, des Mannigfaltigkeitsbegriffs, des Gruppenbegriffs oder des Begriffs der Dimension gewidmet ist, und man durchaus annehmen, daß dies teilweise dem Selbstverständnis der Epoche entsprochen hat.

Der Begriff erschien als prozedierende oder prozessuale Einheit von Methode und Gegenstand und er schien auf diese Weise eine Basis der Verselbständigung der theoretischen Mathematik sein zu können. Am Ende des 19. Jahrhunderts mit fortschreitender Spezialisierung und Arbeitsteilung auch in der Mathematik und mit fortschreitender Inanspruchnahme der Mathematik in der Entwicklung der industriellen Revolution erschien diese Auffassung der eigenen Identität, wie sie durch das begriffliche Denken konstituiert sein sollte, unzureichend. Die angesprochene Unzulänglichkeit des begrifflichen Denkens als der "Lösung" des historische Begründungsproblems der Mathematik besteht darin, daß zum Ende des Jahrhunderts das Begriffliche nur noch als Ausdruck und Merkmal menschlichen Denkens, im Gegensatz etwa zu einem Denken der Maschinen, gesehen wird. Der Gegenstandsbezug im Begrifflichen ist verschwunden, und das begriffliche Denken erscheint als bloße *Eigenschaft* des Subjekts. Indem sich das Subjekt nicht mehr als Teil einer gegenständlichen Welt sieht, bleiben auch der Gegenstand als Widerständigkeit (so wie er dem Algorithmus zugrunde liegt) und der Gegenstand als Vorstellung und Weltbild voneinander getrennt.

Wenn auch kein Zweifel darüber besteht, daß Begriffe und Theorien nicht auf inhaltliche Probleme reduzierbar sind, sondern stets auch Funktionen bezüglich der Identitätssicherung des Erkenntnissubjekts haben, so konstituiert sich andererseits das Subjekt sicherlich nicht bloß im Kopf als Bewußtsein.

In dem Moment, in dem das Problem der Einheit des Wissens angesichts wechselnder Spezialisierung und Arbeitsteilung nicht mehr auf einer über-historischen Ebene und nicht mehr in der Geschlossenheit einheitlicher theoretischer Form gelöst werden kann, sucht man nach prozessualen "Grundlagen". Die Wissenschaftsdisziplinen verselbständigen sich und müssen dafür Mechanismen innerer Dynamik ausbilden. Gleichzeitig müssen die analytischen Unterscheidungen oder die technischen und funktionalen Differenzierungen, die einem derartigen Zweck dienen und ein Merkmal moderner Wissenschaft sind, ein Gegengewicht finden in externen Bezügen, interdisziplinären Wechselwirkungen, Interaktionen mit praktischer Erfahrung oder Konfrontationen, mit Wünschen und Vorstellungen, gesellschaftlichen Normen u.ä. Eigentlich lag es in den philosophischen Absichten des 19. Jahrhunderts im Begriff, die Welt, die zunächst bloß intuitiv als übermäßig komplexe Umwelt gegenwärtig war, in ihrer Komplexität verfügbar zu machen. Letztendlich muß man allerdings feststellen, daß sich die Dynamik von Wissenschaft und Technik als wesentlich zu groß für derartige Vorstellungen erwiesen hat.

Zunächst wandelt sich im 19. Jahrhundert das Verhältnis von Philosophie und Mathematik im Sinne einer dynamischen Wechselwirkung. Während es bisher beispielsweise bezogen auf die universale Aufgabe der Naturerklärung in Begriffen der Hierarchie oder der Priorität des Zugriffs definiert war, man sich beispielsweise im 18. Jahrhunderte fragte, "ob es nicht zu früh sei, die Kräfte der Elektrizität auszumessen und eine mathematische Erkenntnis davon zu verlangen, da man mit der philosophischen darin noch nicht weit gekommen sei", bestimmt sich ihr Verhältnis fortan als eine Komplementarität, deren Grundschema, da es in den Gesetzlichkeiten der gegenständlichen Tätigkeit selbst verankert ist, universal gilt, aber mit einer je spezifischen Ausprägung in den verschiedenen Perspektiven und Standpunkten auftritt. Dadurch werden beispielsweise die empirischen und formal-konstruktiven Wissenschaften einerseits getrennt und andererseits in ihren epistemologischen Grundlagen identifiziert. Davon war bereits die Rede.

Die Ablösung hierarchischer Klassifikationskonzepte impliziert, daß die philosophischen Fragen von Wissenschaft in dieselben eine historische Betrachtungsweise einführen, eine Auffassung, die die Wissenschaft aus ihrer je eigenen Entwicklungsdynamik und wesentlich seltener in den Wechselwirkungen von Arbeitsteilung und Kooperation der verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen und Wissenschaftsbereiche diskutiert werden. Die Wissenschaft wird als Entwicklung des Denkens, die Theorie wird als Entfaltung des Begriffs formuliert und später zuweilen in Termini der Interdisziplinarität erörtert oder sogar noch weitergehend in solchen der Beziehungen und Abgrenzungen umfassender Erfahrungsbereiche wie Wissenschaft, Alltagswissen, Kunst usw. (Während des 19. Jahrhunderts haben dies vor allem diejenigen in dieser Weise gesehen, die an dem Verhältnis von Theorie und Praxis interessiert waren, etwa der herausragende theoretische Physiker Stefan Boltzmann (1844–1905) oder der einflußreiche Technikwissenschaftler Alois Riedler (1850–1936)).

IV

Zwei Typen von Klagen über die Unzulänglichkeiten der Mathematik des 18. Jahrhunderts sind historisch anzutreffen. Einmal steht das Problem des Mechanizismus im Vordergrund, die in der cartesischen Tradition entwickelte Mathematik erscheint als zu unübersichtlich, zu begriffs- und zusammenhanglos (sehr deutlich in dieser Hinsicht die Worte von Galois oder von Grassmann). Andererseits wird der algebraischen Analysis des 18. Jahrhunderts ihre mangelnde Präzision vorgeworfen und die Mißachtung der Grenzen der Validität ihrer Kalkulationen. Euler soll beispielsweise in der Auseinandersetzung über die Natur der Logarithmen negativer Zahlen den Standpunkt vertreten haben, "daß für die korrekte Anwendung von Regeln und Operationen die Natur der Objekte, auf die sie angewendet werden, gleichgültig sei" (vgl. dagegen Cauchy). Es ergaben sich aus diesen Klagen die beiden Hauptprobleme, die die Diskussionen um den Charakter der Mathematik bis heute bestimmt haben, nämlich die Frage nach dem Verhältnis von Intuition und Logik und die Frage nach der Art und dem Status der mathematischen Objekte. Es ergaben sich weiter bereits im frühen 19. Jahrhundert zwei unterschiedliche Stränge in den Begründungsversuchen der Mathematik, die oben bereits angesprochen worden waren und dort als "axiomatische Bewegung" einerseits und "Bewegung der Strenge" andererseits bezeichnet wurden. Beide Bewegungen versuchen, das Problem der Grundlagen des Wissens in diametral entgegengesetzter Art und Weise zu lösen. Die "Bewegung der Strenge" sucht eine reduktionistische Lösung im Rahmen einer empiristischen Epistemologie, während die axiomatische Bewegung eine Begründung gewissermaßen von der Zukunft her versucht, das Bekannte durch das noch Unbekannte, oder enger am Selbstverständnis der Mathematik formuliert, das Endliche durch das Unendliche begründen möchte (vgl. Aggazi 1974, H.N. Jahnke 1978, M. Otte 1988b, M. Panza 1988). Die axiomatische Bewegung versucht den Außenbeziehungen mit ihren unerwarteten neuen Fakten und revolutionären Auswirkungen zu begegnen, während die "Bewegung der Strenge" im Gegenteil das in sich gekehrte Selbstverständnis der reinen Mathematik als einer akademischen Disziplin zum Ausdruck bringt.

Der cartesische Zugang zur Geometrie, der zu einer analytischen Geometrie geführt hat, wurde allgemein als ein Schritt in die richtige Richtung gesehen, aber gewissermaßen ein Schritt, der nicht konsequent genug weitergeführt worden war und von daher zu großer Willkürlichkeit und Undurchsichtigkeit geführt hatte. Die geometrischen Sachverhalte erschienen durch die arithmetisch-algebraische Darstellungsweise vollkommen verdeckt, und die Willkürlichkeit der Koordinaten tat ein übriges, so daß schließlich Intuition und Rechnung beziehungslos nebeneinander zu stehen schienen. Dabei wurden aber, und das machte die Problematik wirklich produktiv, die Vor- und die Nachteile des analytischen Verfahrens letztendlich in ein und derselben Sache gesehen, nämlich in seiner rigorosen Operativität und dem damit verbundenen Zurückdrängen empirischer referentieller Bezüge und apriori sowieso nicht sinnvoll beantwortbarer Bedeutungs- und Wesensfragen. Der empirische Konstruktivismus in der Geometrie leidet an der Zusammenhanglosigkeit empirischer Einzelfälle, deren wesentlicher Zusammenhang im Verfahren nicht einholbar scheint. Die Zahl ist dagegen niemals dem isolierten geometrisch-empirischen Faktum vergleichbar. In der Arithmetik erscheint, wie Schelling 1802 kritisch gegen Kant gewendet feststellt, das Besondere nur als Allgemeines, als operatives Verfahren jenseits aller inhaltlichen Besonderheit. Verallgemeinerungen, die nur der Analyse zugänglich schienen, mit Hilfe der Zahlen in die Geometrie eingeführt zu haben, darin wird das große Verdienst von Descartes gesehen (Hankel 1869). Die analytischen Verallgemeinerungen und Urteile schienen jedoch oft die Bedeutungsfrage, den referentiellen Bezug aus dem Auge zu verlieren. Darin liegt ihre Stärke und Schwäche zugleich.

Die Analyse, so 1813 Lazare Carnot (1753-1823), ist nur dadurch vor der Synthese ausgezeichnet, daß sie es erlaubt, mit imaginären und fiktiven Gegenständen zu operieren. Nur hierin liegt ihr Verallgemeinerungspotential. Das nämliche Prinzip in die synthetische Geometrie eingeführt, führt jedoch zur wahren Kombination von Operativität und Strenge, gerade weil die Geometrisierung es erlaubt, die singulären Elemente im Kontext aller Stellen zu sehen. Beispielsweise erlaubt die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen - und es handelt sich hierbei um ein zwar elementares, aber epistemologisch für die Mathematik des frühen 19. Jahrhunderts wichtiges Beispiel - erst das Verständnis der Beziehungen der sogenannten imaginären zu den reellen Zahlen.

Die größere Strenge der Geometrie rührt daher, daß in der Geometrie der Übergang vom Reellen ins Imaginäre, vom Regulären ins Singuläre deutlicher kontrolliert werden kann. Selbst Cauchy (1789-1857), dessen "Cours d'Analyse" von 1821 als markante Grundlage eines Arithmetisierungsprogramms gilt, betont in der Einleitung zu diesem Buch, daß er stets die Strenge gesucht habe, "welche man in der Geometrie verlangt, so daß ich niemals zu Beweisgründen meine Zuflucht genommen habe, welche von der algebraischen Allgemeingültigkeit her genommen sind. Beweisgründe dieser Art, obgleich man dieselben gewöhnlich und besonders beim Übergang ... von den reellen Größen zu den imaginären Ausdrücken zuläßt, dürfen meiner Meinung nach nur als Induktionen angesehen, ... Es verdient, bemerkt zu werden, daß dergleichen Induktionen dazu verleiten, daß man den algebraischen Formeln eine unbestimmte Ausdehnung gibt."

Die reine Mathematik im 19. Jahrhundert ist also gewissermaßen auf einer Interaktion von Arithmetik und Geometrie gegründet gewesen. Darauf haben bereits 1802 Hegel und Schelling in ihrem "Kritischen Journal" hingewiesen. Sie haben diesen Sachverhalt aus Kantischen Auffassungen weiterentwickelt. Kant habe zwar als erster die Konstruktion "als Gleichsetzung des Begriffs und der Anschauung", d.h. eigentlich so wie es dem idealen Selbstverständnis der Mathematik entspricht, wie es aber an dieser Stelle von Schelling als ein "echt philosophisches" bezeichnet wird, definiert, aber er habe dann doch den Begriff der Anschauung nicht weit genug und nicht radikal genug gefaßt. H. Grassmann (1809–1877) hat dann als erster bewußt auf einer von der Interaktion ausgehenden philosophischen Grundlage eine mathematische Theorie entwickelt, deren neuer Charakter vor allem in einer neuen, nämlich relationalen Gegenstandsauffassung zu suchen ist (M. Otte 1988a).

In der zunächst von den Ingenieuren und Technikern seit L. L. Carnot (1753–1823) und G. Monge (1746–1818) getragenen Erneuerung der Geometrie erscheint ein Gegensatz zwischen der synthetischen Geometrie als Mittel der freien Ausbildung der Anschauungskraft des Subjekts, versus der Geometrie im Sinne eines syntaktisch bestimmten symbolischen Kalküls oder einer axiomatisierten Theorie im formalen Sinn. Es ist ja auffallend, daß der Streit zwischen synthetischer und analytischer Geometrie ein Methodenstreit gewesen ist, der weder ontologische noch sachlich geometrische Grundlagen gehabt hat, sondern sich an der Frage des Selbstverständnisses des Subjekts und seiner Rolle in der mathematisch-technischen Entwicklung entzündet hatte. In der Untersuchung der geometrischen Objekte haben sich synthetische und analytische Vorgehensweise durchaus produktiv ergänzt. Man kann sogar sagen, daß ohne die Wechselwirkung von analytischen und synthetischen Verfahren es im 19. Jahrhundert nicht zu jenem "goldenen Zeitalter" der Geometrie gekommen wäre. (Für das 18. Jahrhundert vgl. Boyer 1956, für das frühe 19. Jahrhundert vgl. M. Paul 1980, L. Daston 1986, J. Folta 1987 und bezüglich der Technikerbewegung am Ende des 19. Jahrhunderts, M. Otte 1987).

Oder um eine weitere Illustration zu geben: Die cartesische Wissenschafts-konzeption mit ihrer Bevorzugung arithmetisch-algebraischer Verfahren und ihrem Interesse an mechanischen Erklärungen (es interessiert im Augenblick nicht, inwieweit Descartes selbst ein Cartesianer in diesem Sinn gewesen ist), erscheint in der Mathematik und Physik sowohl als Reduktionismus und Empirismus, wie auch andererseits als eine Betonung des Primats der Tätigkeit gegenüber dem Wissen, des Prozesses gegenüber der Form. Das heißt bezogen auf das Selbstverständnis des Subjekts: Das Subjekt erscheint sowohl als definierbarer Gegenstand als "Maschine", wie auch als unendliche dynamische Kraft und Tätigkeit.

Es entsteht eine Art Gegensätzlichkeit. Auf der einen Seite verwandelten sich die Axiome der Geometrie aus notwendigen und wahren Gesetzmäßigkeiten des Raumes zu Beschreibungen alternativer möglicher geometrischer Modelle. Auf der anderen Seite werden die Definitionen und genetischen Konstruktionen der Arithmetik aus "freien" willkürlichen Entwürfen zu Gesetzmäßigkeiten, die das beschreiben, was für uns gegenwärtig "Berechenbarkeit" bedeutet.

Im Sinne einer groben historischen Periodisierung kann man das Jahr 1780 als den Beginn einer "Subjektivierung der Geometrie", und das Jahr 1880 als den Beginn einer "Objektivierung der Arithmetik" bezeichnen. Beides sind zusammenhängende Prozesse, die beide auch stets als problematisch empfunden wurden (es hat während des ganzen 19. Jahrhunderts Auffassungen gegeben, die beides, im Sinne einer strengen Unterscheidung von reinem Denken und gegenständlicher Erfahrung, abgelehnt haben. Hilbert dagegen hat in seinen Bemühungen zu den Grundlagen der Mathematik vor allem die Intention einer "Harmonie zwischen Sein und Denken" verfolgt (Hilbert 1925, 161-190.)

Man kann beide Prozesse als unterschiedliche Formen der Relativierung der Unendlichkeitsvorstellungen des Erkenntnissubjekts im Sinne eines realistischen wissenschaftlichen Programms interpretieren. Andererseits blieb natürlich auch der dynamische Aspekt des Subjekts, der mit den Unendlichkeitsvorstellungen verbunden ist, in beiden Entwicklungssträngen erhalten. In der einen Richtung, die gerade thematisiert wurde, kommen diese Aspekte im Sinne der Unverzichtbarkeit philosophischer Elemente innerhalb jeder Wissenschaft zum Ausdruck. Über die positivistische Konzeption realisiert sich dieser Aspekt außerhalb der Wissenschaften, z.B. in der Kunst, in der Religion, oder einer von den Wissenschaften getrennten Philosophie.

V

Beginnen wir diesen Abschnitt mit zwei Fragen:
1. Was *verbindet* die Mathematik mit den anderen Wissenschaften und den übrigen kognitiven Erfahrungsbereichen des Menschen? Wie ordnet sich die Mathematik ein in die Gesamtheit des Wissens und der Erkenntnis?
2. Was *unterscheidet* die Mathematik von anderen Wissenschaften? Was macht ihre Spezifik aus? Was bestimmt ihren besonderen Charakter in Differenz zu anderen Bereichen menschlicher Tätigkeit und Erfahrung?

In Beantwortung der Frage 2 wird üblicherweise auf den kumulativen Charakter der Mathematik verwiesen. Positivistische und neo-positivistische Wissenschaftsvorstellungen haben daraus ein Programm der Trennung von Philosophie und Wissenschaft gemacht. In der Betonung der Differenz eines "context of discovery" von "context of justification", wurde dafür ein kurzes und prägnantes Schlagwort gefunden. Die Abtrennung der Mathematik, insbesondere der reinen Mathematik, als einer einzelnen Wissenschaftsdisziplin beruht darauf, daß jede Objektkonstitution ihre Genesis auslöscht. Wenn das Ringen um das Verständnis des gegenständlichen Problems in die "richtige" mathematische Definition eingemündet ist, wird alles philosophische Problematisieren zur Unerheblichkeit verdammt. Daher ist der größte Teil der philosophischen Kritik an der Mathematik von der Zeit des Bischofs Berkeley bis auf unsere Tage unbeachtet geblieben.

In dieser technisch-operativen Auffassung definiert sich die Mathematik auch im Gegensatz zur Geschichte. In der Mathematikgeschichtsschreibung gerinnt die gesamte historische Entwicklung zu einer Abfolge weniger aufgeklärter Vorstufen des zeitgenössischen Entwicklungsstandes mathematischen Denkens. Wollte man umgekehrt die historische Entwicklung der Mathematik aus den Problemen heraus verstehen, die sich der Mathematik jeweils gestellt haben, bzw. die sie in dem je ins Auge gefaßten historischen Augenblick in Angriff genommen hat, dann entstünde die philosophisch nicht unbelastete Aufgabe, diese Probleme in ihrem weiteren historischen Kontext zu placieren. In der reinen Mathematik dagegen tut man so, als ob angesichts der Problemlösung schon von vorneherein klar gewesen wäre, worin eigentlich das Problem bestanden hatte und wie eine Lösung desselben auszusehen hat. Man spricht im strengen Sinne eigentlich nicht über Probleme, sondern nur über Problemlösungen.

Die erkenntnistheoretische Trennung, die die analytischen Disziplinen, welche sich mit den reinen Erkenntnisformen beschäftigen, von "denen, die die Synthese benutzen müssen", separiert, beschreibt Michael Foucault als das grundlegende Ereignis, "das der abendländischen *episteme* gegen Ende des 18. Jahrhunderts widerfuhr" (M. Foucault 1971, 305/6).

Voraussetzung dieser Trennung ist, daß das philosophische Denken sich vom wissenschaftlichen trennt. Es erscheint uns heute fremdartig, wie eng die metaphysisch-philosophische Auslegung und die logische und formal-technische Handhabung in den grundlegenden Erkenntnisprinzipien, beispielsweise dem "Kontinuitätsprinzip" oder dem "Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren" in der Leibnizschen und cartesischen Philosophie gewesen waren. Diese Ablösung des philosophischen vom wissenschaftlichen Denken äußert sich im Entstehen der einzelnen Disziplinen. Die Entstehung der reinen Mathematik ist dadurch gekennzeichnet, daß grundlegende Erkenntnisprinzipien zu operativen mathematischen Definitionen verdichtet und geschlossen werden. Auch die erkenntnistheoretische Frage nach den Grundlagen der Mathematik wird in diesem Prozeß zu einer bloß technischen Angelegenheit, die niemanden, außer einigen Spezialisten, angeht und auch von den Mathematikern ignoriert wird.

Aber diese hier gerade vorgetragenen Vorstellungen, so plausibel sie scheinen, gehen nicht ganz auf, treffen nicht den gesamten Sachverhalt. Das Kontinuitätsprinzip ist ein gutes Beispiel, weil es in der Entstehung der reinen Mathematik in unserem Sinne in Frankreich des frühen 19. Jahrhunderts einerseits eine fundamentale Rolle gespielt hat, andererseits aber durch Poncelet (1788–1867) und Cauchy (1789–1857) jeweils diametral gegensätzlich interpretiert worden ist. Der Unterschied ist nicht in Kategorien der Beschreibung des Denkens als entweder "modern" oder andererseits traditions-verhaftet zu fassen, sondern beruht auf unterschiedlichen Orientierungen im Kontext gesellschaftlicher Arbeitsteilung. Für Poncelet ist das Kontinuitätsprinzip ein allgemeines methodologisches Prinzip oder sogar ein Prinzip der Philosophie der Mathematik, ein Mittel der Verbindung der Mathematik mit philosophischen Denkweisen. Cauchy hat Poncelet in diesem Punkt heftig kritisiert und hat gleichzeitig seine Mathematik auf das nämliche Prinzip gegründet, allerdings in einer ganz anderen Form. Cauchy in dem Versuch, a priori den Gegenstand jeder mathematischen Untersuchung exakt zu umschreiben und definitorisch abzugrenzen, hat daraus einen fundamentalen mathematischen Begriff, den Begriff der stetigen Funktion gemacht. Cauchy wollte damit durchaus zum Ausdruck bringen, daß die Mathematik vor allem von der Philosophie und den "Ideologen" abzugrenzen sei. Das mathematische Verfahren trat als das Prinzip der kumulativen Entwicklung der positiven Wissenschaften insgesamt in Erscheinung. Dieser Gegensatz tritt auch in anderen gesellschaftlichen Funktionen der Mathematik hervor, z.B. im Bildungssystem. Immer wieder (vgl. die Kleinschen Reformen zu Beginn des Jahrhunderts mit ihrer Orientierung an der fundamentalen Rolle des Funktionsbegriffs oder die sogenannte "neue Mathematik" mit ihrer mengentheoretischen Ausrichtung) wurden aus grundsätzlichen methodologischen Orientierungen bloße neue "Lernstoffe", aus einem universalen Mittel ein sehr begrenztes technisches Problem. Beispielsweise blieben Begriff und Vorstellung der "Funktion" in den Lehrbüchern und Lehrplänen lange zwiespältig. Es wurde zwischen empirischen oder grafischen (d.h. nicht an einen algebraischen Funktionsterm gebundenen) und algebraisch dargestellten Funktionen unterschieden, ohne einen wirklichen Zusammenhang herzustellen. Das bedeutete aber, "daß der Kern der Idee ... die Einführung des Funktionsbegriffs sollte dem Schüler einen Einblick in das Wesen des neuzeitlichen wissenschaftlichen Denkens vermitteln, verfehlt wurde" (vgl. G. von Harten u.a. 1986, 2).

Ph. Kitcher hat kürzlich herausgearbeitet, daß die Betonung der Arbeitsteilung in den Wissenschaften wesentlich für die Begründung der These vom kumulativen Charakter der Mathematik ist (Kitcher 1984, 159). Entsprechend dieser Sichtweise entwickelt die Mathematik rein formal-technische Modelle, die dann von anderen aus einem Nutzungs- oder Anwendungsinteresse heraus inhaltlich interpretiert werden können. Eine solche Auffassung ist tief im Selbstverständnis der reinen Mathematik verankert. Die theoretische Mathematik liefert das Wissen für die vollkommen unerwarteten späteren Anwendungen, sagen viele.

Kitcher (vgl. 161) führt den kumulativen Charakter der Mathematik darauf zurück, daß sie durch formale Verallgemeinerung und durch Reinterpretationen in der Lage ist, Brüche und Inkommensurabilitäten zu vermeiden. Diese Darstellung in Begriffen der "Verallgemeinerung und Spezialisierung" oder der "Unbestimmtheit der Interpretation" dient dazu, sowohl den kumulativen und kontinuierlichen Charakter von Mathematik und Wissenschaft hervorzuheben bzw. dem Versuch, einen solchen aufrecht zu erhalten (als Beispiel kann Poincaré genannt werden), wie sie andererseits auch dazu führt, Brüche, Inkommensurabilitäten und Revolutionen in der Wissenschaftsgeschichte zu behaupten (Kuhn, Feyerabend). Es liegt auf der "linguistischen" Ebene beispielsweise nahe, eine relativ unmittelbare Korrespondenz der Gleichungen der Newtonschen Physik mit entsprechen-den Gleichungen in der Physik Einsteins zu sehen, eine Korrespondenz, die ich erhalte, indem ich in den letzteren die Lichtgeschwindigkeit gegen unendlich gehen lasse. Es liegt aber die gegenteilige Auffassung ebenso nahe. Man muß feststellen, daß die Kontinuität nur retrospektiv zu sehen ist und sich die verallgemeinerten Gleichungen Einsteins niemals auf eine direkte und formale Weise, aus denen Newtons gewinnen ließen. Man kann, wie Kuhn im Vergleich der Newtonschen und der Einsteinschen Physik betont, darauf hinweisen, daß die physikalischen Beziehungen der Einsteinschen Begriffe "auf keinen Fall mit denen der Newtonschen Begriffe gleichen Namens identisch sind. Die Newtonsche Masse bleibt erhalten, die Einsteinsche ist austauschbar mit Energie. Nur bei niedrigen relativen Geschwindigkeiten können diese beiden in der gleichen Weise gemessen werden, und sogar dann dürfen sie nicht als gleich angesehen werden" (Kuhn 1967, 140). Schließlich läßt die für die Einsteinsche Physik wesentliche Tatsache, der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, einen Grenzübergang nach unendlich nicht zu.

Im selben Sinne unterscheidet sich Galileis mathematische Naturwissenschaft "von der mathematischen Naturphilosophie seiner scholastischen Vorläufer auf den ersten Blick nicht so sehr durch ihren mathematischen Apparat - welcher weiterhin durch die Euklidische Geometrie geprägt ist - als vielmehr durch ihre ontologischen Voraussetzungen: Die Mathematik ist nicht mehr nur eine geeignete Sprache, über die Wirklichkeit zu reden, es wird die viel stärkere These aufgestellt, die Wirklichkeit sei in ihren wesentlichen Aspekten mathematisch" (Th. Mormann 1986, 11).

Aus den gerade zitierten Beispielen scheint tatsächlich zu folgen, daß die formale Betrachtungsweise eher Kontinuität suggeriert. Diese formale Betrachtungsweise kann sich jedoch nicht mit einem syntaktisch-algorithmischen Operieren begnügen. Ein derartiges Operieren erzeugt immer nur "lokale" Zusammenhänge, und das genügt nicht, sobald die Mathematik sich zu einem großen sozialen Feld erweitert. Es werden allgemeinere Formbegriffe und eine Einheit von Form und Inhalt gesucht, wie sie nur in der Ästhetik des Metaphorischen oder der Intuition der Analogie zu finden ist. H. Poincaré hat diese Tendenz auf dem Ersten Internationalen Mathematiker-Kongreß 1897 in Zürich, gegen den logischen Formalismus gewendet, folgendermaßen beschrieben. "Jede einzelne Wahrheit kann ersichtlich auf unendlich viele verschiedene Arten ausgedehnt werden; man muß eine Wahl treffen, ... Was wird uns bei dieser Wahl leiten? Das kann nur die Analogie. Aber wie unbestimmt ist dieses Wort! ... Wer hat uns die wirklich tiefen Analogien kennengelehrt. Es ist der mathematische Geist, der die Materie verschmäht, um sich an die reine Form zu halten. Er ist es, der uns lehrt, Dinge mit dem gleichen Namen zu nennen, die sich nur durch den Stoff unterscheiden, ..." (Poincaré 1964, 108).

Die Autonomisierung der reinen Mathematik gegenüber einer externen Wirklichkeit, die hier zum Ausdruck kommt, beruht auf der Cantorschen Mengentheorie als einer bestimmten Form mathematischer Ontologie. Auf diese Weise gewinnen wir *drei* verschiedene Konzepte mathematischer Wahrheit, nämlich formale Ableitbarkeit oder Beweisbarkeit, zweitens mengentheoretische Wahrheit und drittens modelltheoretische Angemessenheit, bezogen auf eine intendierte empirische Anwendung. Es handelt sich gewissermaßen um eine "Innensicht" und eine "Außensicht" der Mathematik, die sich, wie weiter zu erörtern sein wird, nicht nur gegenseitig ausschließen, sondern auch komplementär ergänzen. In der reinen Mathematik tritt nur die "Innensicht" auf, erscheinen nur die beiden ersten Formen mathematischer Wahrheit, die man sich an einem elementaren Beispiel folgendermaßen vergegenwärtigen kann. Identitäten von Formeln kann man in der Mathematik entweder dadurch verifizieren, daß man die Transformation der einen Formel in die andere nach den vorgegebenen Regeln des Kalküls nachvollzieht oder kombinatorisch, indem man sich eine Menge von Dingen vorstellt, die auf zwei Arten gezählt werden, wobei die Ergebnisse natürlich gleich sein müssen.

Die mengentheoretische Betrachtung führt eine neue Wirklichkeitsebene zwischen das mathematische Operieren und die externe Wirklichkeit ein, und die Mathematik macht sich auf diese Weise "unabhängig" von den anderen Bereichen wissenschaftlicher Aktivität.

Diese Isolierung der "Innensicht" ist allerdings in verschiedener Hinsicht problematisch. Zunächst werden durch die mengentheoretische Ontologie nicht nur alte Probleme gelöst und bis dato ungeahnte neue Möglichkeiten der analytischen Unterscheidung und begrifflichen Differenzierung in die Mathematik eingeführt, sondern es werden ebenso solche eliminiert. Beispielsweise ist der modernen reinen Mathematik im Sinne von Cantor oder Bourbaki es nicht mehr möglich, zwischen einer beliebigen Äquivalenzrelation und einer Identität zu unterscheiden, ebensowenig gelingt eine begründete Unterscheidung zwischen Produkt und Summe, ohne Benutzung von Konzepten, die über die mengentheoretische "Strukturierung" der Wirklichkeit hinausgehen (etwa Begriffe der Prozeßbeschreibung, wie "Linearität" und "Wechselwirkung").

Die Komplementarität von Ableitbarkeit und mengentheoretischer Wahrheit und die damit gegebene "Autonomisierung" beruht wiederum auf der Dialektik der Vorstellungen von den Möglichkeiten des Subjekts als zwar aktuell immer begrenzten aber insgesamt unendlichen (vgl. dazu auch Y. Manin 1981, 3, M. Otte 1988c). Diese Dialektik kommt am deutlichsten in Gödels Unvollständigkeitstheorem zum Ausdruck und hat zu entsprechend gegesätzlichen Interpretationen desselben geführt. Aus der Sicht des Cantorschen "unendlichen Subjekts" gilt Gödels Theorem als Begründung für die Behauptung, daß das menschliche Denken prinzipiell vom maschinellen Denken verschieden ist, so daß man von einem "Denken" der Maschinen nicht sprechen kann (Webb 1980, bezüglich weiterer Literaturverweise).

Man kann den Sinn dieses Theorems allerdings auch, ganz im Gegenteil, in der Begrenztheit des menschlichen Denkens gesehen werden, einer Begrenztheit, die Mathematik und Logik insgesamt erst sinnvoll und möglich macht, weil absolute "wirkliche" Wahrheit uns verschlossen bleibt. Auch die Differenz dieser Auffassungen hängt also mit der Frage des Stellenwerts des dritten oben genannten Aspekts mathematischer Wahrheit zusammen, d.h. mit der Auffassung zu der fehlenden Bedeutsamkeit der Anwendungen der Mathematik für ihre Epistemologie. Man kann im Sinne der obigen Frage 1 die Anwendbarkeit der Mathematik durch ihre Verwandtschaft mit anderen menschlichen Wissens- und Erfahrungsbereichen erklären, oder man kann die Anwendbarkeit der Mathematik als eine reine Willensentscheidung ansehen und die Frage nach dem Wesen der Mathematik als davon ganz unberührt auffassen, also eher im Sinne des Interesses der zweiten Frage vorgehen.

Zusammenfassend kann man, bezogen auf die beiden formulierten Fragen also feststellen, daß die Mathematik von "innen" und von "außen", d.h. im Gesamtprozeß gesellschaftlicher Spezialisierung und Arbeitsteilung jeweils ganz unterschiedlich erscheint. Insofern die Mathematik als Besonderheit und Spezialität, d.h. eingebettet in den Prozeß gesellschaftlicher Arbeitsteilung gesehen wird, erscheint sie als eine formale Methode oder Methodologie. Letztendlich läuft die mathematische Untersuchung dann auf eine Betrachtung der mathematischen Techniken und der darauf beziehbaren Probleme hinaus. Es ist sicherlich einseitig, weil insbesondere die Entwicklungsdynamik der Mathematik damit nicht erfaßt wird. Versucht man dagegen die Anwendbarkeit der Mathematik im Geiste des Glaubens an den exemplarischen und von anderen Erkenntnisweisen nicht grundsätzlich getrennten Charakter der Mathematik mit der Frage nach den erkenntnistheoretischen Grundlagen derselben zu verknüpfen und betrachtet die Mathematik in diesem Sinne eher von "innen", dann entsteht die Tendenz, ihr den Charakter einer allgemeinen Heuristik oder "Philosophie" ohne eigenen Gegenstand zu verleihen. Die logisch-technischen Aspekte der Mathematik treten dann in den Hintergrund und streng betrachtet, müßte dann anerkannt werden, daß auch die Mathematik über keine absolut sicheren, unzweifelhaften Erkenntnisse verfügen kann.

Die Bezeichnungen einer Perspektive auf die Mathematik von "innen" oder von "außen" sind nicht zu reifizieren. Stets finden sich in der mathematischen Aktivität zwei Leistungen. Einmal geht es darum, komplexe intuitive Vorstellungen und globale Problemsituationen in ihre operativ einholbaren Konsequenzen hinein aufzulösen. Zum zweiten ist die mathematische Tätigkeit darauf ausgerichtet, überraschende Interpretationen oder Metaphern zu finden. Indem dabei ein A als ein B gesehen wird, mag es zwar u.a. mit neuen, bisher an B erprobten Methoden bearbeitbar sein, und der Mathematiker kann dies, insofern er nicht an Problemen, sondern Problemlösungen interessiert ist, als Bestandteil der erstgenannten Aktivität sehen, aber das wäre meines Erachtens zu kurzschlüssig, insofern die Legitimationsproblematik per se einen Charakter aufweist, so daß sie nicht reduktionistisch zu behandeln ist.

Die Akzeptanz derartiger Metaphern oder derartiger innovativen Interpretationen hängt, sofern es sich nicht bloß um innermathematische Verallgemeinerungen handelt, viel stärker vom allgemeinen sozio-kulturellen Kontext (von "gängigen" Vorstellungsmöglichkeiten, vom Bewußtsein "externer" Kooperationspartner etc.) ab. Die Bühne der Wahrheitssuche reicht weit über die Mathematik hinaus. Gleichzeitig sieht die Mathematik sich, insbesondere insofern sie philosophischen Tendenzen zuneigt, in einer Hauptrolle auf dieser gemeinsamen Bühne (vgl. die obigen Beispiele, insbesondere das Beispiel der Entstehung der galileischen Naturwissenschaft).

VI

Edmund Husserl (1859-1938) hat seine Philosophie aus einer dermaßen philosophisch-exemplarisch aufgefaßten Mathematik heraus entwickelt. Seine Idee einer allgemeinen Methodologie oder "einer theoretischen Wissenschaft von der Theorie überhaupt", gewinnt "festen Gehalt" durch den Verweis auf eine rein intensional aufgefaßte moderene Strukturmathematik, und zwar deshalb, weil "das gegenständliche Korrelat des Begriffs der möglichen, nur der Form nach bestimmten Theorie der Begriff eines möglichen, durch eine Theorie solcher Form zu beherrschenden Erkenntnisgebietes überhaupt" ist, und ein solches Erkenntnisgebiet aber durch die Gegenstandsauffassung der mengentheoretisch fundierten Strukturmathematik gegeben ist. Husserl sieht die professionelle Mathematik im engeren Sinn im Verhältnis zur Philosophie technisch bestimmt. Auch hier herrscht Arbeitsteilung: "Die Konstruktion der Theorien, die Strenge und methodische Lösung aller formalen Probleme wird immer die eigentliche Domäne des Mathematikers bleiben" (Logische Untersuchungen, Bd. 1, ^{n} 71, 248-252). Dabei bleibt zu beachten, "daß der Mathematiker in Wahrheit nicht der reine Theoretiker ist, sondern nur der ingeniöse Techniker, gleichsam der Konstrukteur, welcher in bloßem Hinblick auf die formalen Zusammenhänge, die Theorie wie ein technisches Kunstwerk aufbaut. So wie der praktische Mechaniker Maschinen konstruiert, ohne dazu letzte Einsicht in das Wesen der Natur und ihre Gesetzlichkeit besitzen zu müssen, so konstruiert der Mathematiker Theorien ... ohne dazu letzte Einsicht in das Wesen von Theorie überhaupt und in das Wesen ihrer sie bedingenden Begriffe und Gesetze besitzen zu müssen."

Die philosophische Forschung "will dem Spezialforscher nicht ins Handwerk pfuschen, sondern nur über Sinn und Wesen seiner Leistungen in Beziehung auf Methode und Sache zur Einsicht kommen. Dem Philosophen ist es nicht genug, daß wir uns in der Welt zurechtfinden, daß wir Gesetze als Formeln haben, ... sondern was das Wesen von Dingen, Vorgang, Ursache, Wirkung, Raum, Zeit und dergleichen ist, will er zur Klarheit bringen; und weiter was dieses Wesen für wunderbare Affinität zu dem Wesen des Denkens hat, daß es gedacht, des Erkennens, daß es erkannt, der Bedeutungen, daß es bedeutet sein kann, usf. Und baut die Wissenschaft Theorien zur systematischen Erledigung ihrer Probleme, so fragt der Philosoph, was das Wesen der Theorie ist, was Theorie überhaupt möglich macht und dergleichen." Diese Auffassung hat er aus Ansichten Bolzanos, Grassmanns, Cantors usf. weiterentwickelt.

Der Zusammenhang von Philosophie und Mathematik wird von Kant bis zu Husserl im Sinne einer Transzendentalismus gedacht, der eben der Philosophie die Aufgabe zuweist, die transzendentalen Bedingen der Möglichkeit, mathematischer Erkenntnis zu erforschen, die "Idee einer Wissenschaft von den Bedingungen der Möglichkeit von Theorie überhaupt" (Husserl) zu gestalten, während der Mathematik in dieser arbeitsteiligen Kooperation die Aufgabe zufällt, "wesentliche Typen möglicher Theorien bestimmt" auszuarbeiten.

Das Wesentliche an Husserls Konzeption besteht in der Tatsache, daß die Gegenständlichkeit der Theorien für ihn an die subjektive Evidenz, an die Wahrnehmung gebunden ist, die eine Bewußtseinsweise darstellt, "in welcher das darin Bewußte sich als es selbst zeigt". Dies impliziert eine vollkommen formale Konzeption des Gegenstands einer Theorie, denn nur das Formale läßt sich direkt geben, ohne daß es weitere Bedeutungsfragen nach sich zieht. In der intuitiven Evidenz erscheint gewissermaßen das Wesen einer Sache als Form. "Das gegenständliche Korrelat des Begriffs der möglichen, nur der Form nach bestimmten Theorie ist der Begriff eines möglichen, durch eine Theorie solcher Form zu beherrschenden Erkenntnisgebietes überhaupt" (Logische Untersuchungen, 248/49).

Mathematik und Philosophie treffen sich insofern, als die wirkliche Evidenz sich niemals auf empirische Objekte, sondern stets nur auf "reine Phänomene" oder "Denkobjekte" beziehen kann. Beide unterscheiden sich lediglich im Subjektiven, nämlich in der Frage, ob ein gewisser Erkenntnisakt mit Bewußtsein oder rein operativ und orientiert auf reine Sachprobleme vollzogen wird. Aus der Gegenständlichkeit menschlicher Erfahrung allein kann sich kein Unterschied ergeben, denn gibt es eine unmittelbare Beziehung zum Gegenstand, wie sie die Evidenz fordert, dann gibt es eine derartige Beziehung auch in automatischer, gleichsam mechanisierbarer Form. Das Problem wird unlösbar, wenn Subjektives und Objektives nur in der Differenz von beidem gedacht werden. Diderot hat das in seinem "Salon von 1767" als Problem vorgeführt (Diderot 1967, Bd. II, 77). Das zentrale Problem einer Phänomenologie im Sinne Husserls ist also das Problem der "Objektivität des Subjektiven". Seine Erörterung würde den Rahmen der vorliegenden Themenstellung sprengen.

Diese Tatsache, daß sich nämlich Unterschied und Zusammenhang von Philosophie und Technik nur im Subjekt und durch das sich entwickelnde Subjekt zeigen, hat einerseits die Mathematik und die Mathematisierbarkeit des Wissens ins Zentrum aller heutigen Debatten um die Wissenschaft gerückt und hat andererseits innerhalb der Mathematik selbst zu einer beinahe 100 Jahre währenden kontroversen Diskussion geführt. Diese hat sich um Gegensätze wie "Begriff versus Formel", "Intuition versus Logik", "Sinn versus Beweis" zentriert, und sie hat natürlicherweise mit dem Auftreten des Computers erneut an Intensität zugenommen. Der antagonistische Charakter dieser Gegensätze und die Heftigkeit, mit der sie in der Diskussion auftreten, ist wiederum eigentlich den illusorischen Vorstellungen geschuldet, die das Subjekt selbst aus der Entwicklung ausnehmen. Alles verändert sich und variiert, alle Lebensumstände des Menschen sind einer zunehmenden Dynamik unterworfen, aber die Genese des Subjekts selbst hält man für abgeschlossen. Daß der Mensch sich durch seine eigene Tätigkeit auch selbst konstruiert, bleibt ein noch unbewältigtes Faktum.

Dabei ist diese Diskussion, wie gesagt, durchaus nicht auf die Mathematik beschränkt, sondern sie unterliegt heute dem größten Teil der im Geist der sogenannten "New Age"-Philosophie vorgetragenen Wissenschafts- und Technikkritik. Wissenschaft und Technik sind, so sagt man, einerseits in ihrer Erfassung der Wirklichkeit nicht differenziert genug und sie sind gleichzeitig zu umfassend. Das geht so weit, daß, wie Prigogine und Stengers in ihrem Buch "Dialog mit der Natur" schreiben, die Wissenschaftler sich immer wieder genötigt sehen, "sich zu entscheiden zwischen der Behauptung, daß die wissenschaftliche Wahrheit absolut und umfassend sei und dem Rückzug auf eine Konzeption, nach der die wissenschaftliche Theorie ein pragmatisches Rezept für den wirksamen Eingriff in Naturprozesse ist". Prigogine und Stengers deuten diesen Sachverhalt dahingehend, "daß die klassische Wissenschaft inzwischen ihre Grenzen erreicht hat", wobei sie unter 'klassischer Wissenschaft' im wesentlichen die Newton'sche Dynamik und deren Bild der Natur verstehen. Das Bild der Natur, das die klassische Wissenschaft entwirft, sei gekennzeichnet durch die Dominanz allgemeiner, einfacher, ewiger, zeitunabhängiger Gesetze.

Der Relativismus der neueren Konzepte, die anstreben, diese genannten Defizite der klassischen Wissenschaft zu beheben, laufen alle irgendwie darauf hinaus, von der Wissenschaft eine Selbstreflexivität zu fordern, die zwei Seiten hat, nämlich die Forderung nach dem Einschluß des Erkenntnissubjekts in die Wissenschaft selbst oder andererseits eine Identifizierung von Wirklichkeit und Wissen. Beides läuft auf einen Determinismus und Objektivismus hinaus (vgl. Otte 1988d) der paradoxe Züge trägt bzw. sich in einen unendlichen Regreß verwickelt. Um das, bezogen auf den einen Aspekt, kurz zu verdeutlichen. Das erkennende Subjekt kann sich nicht umstandslos als Objekt der eigenen Erfahrung erkennen. Anderenfalls verwickelten wir uns in einen unendlichen Regreß bzw. in ein unlösbares Paradox des Selbstbezuges, ähnlich den Antinomien der Mengenlehre. Das Ich sieht sich selbst und sieht, wie es sich selbst sieht und sieht, daß es sieht, wie es ... usf. Husserl hat dies Problem der Selbstreferenz klar ausgesprochen. "Wie soll ein Teilbestand der Welt, ihre menschliche Subjektivität, die ganze Welt konstituieren ... Der Subjektbestand der Welt verschlingt sozusagen die gesamte Welt und damit sich selbst" (Die Krisis der europäischen Wissenschaften, 183). Ganz gleichgültig, wie man diesen Regreß bewertet, ob man ihn im Sinne der Postulation einer unmittelbaren Evidenz abschneidet oder das Subjekt als "unendliche Intelligenz" im Sinne von LaPlace' Dämon sieht, in jedem Fall wird unsere zukünftige Geschichte zufällig und unvorhersehbar. (Bekanntlich diente LaPlace seine Idee einer "unendlichen Intelligenz" dazu, den Begriff des Zufalls in die klassische Wissenschaft einzuführen, indem er die Identität von absoluter Zufälligkeit und absolutem Determinismus zeigte.) Mit anderen Worten: Wissen des Subjekts um sich selbst basiert seinem Inhalt nach lediglich auf der Unterscheidung zwischen Subjekt und Umwelt und ist ansonsten implizites Wissen, dessen Bedeutung in seinem Mittelcharakter zur Gewinnung expliziten Wissens, also Wissens über Gegenstände, zu sehen ist. Die Paradoxie des Selbstbezuges löst sich auf, indem man ähnlich wie im Falle der Intentionalität den Mittelcharakter hervorhebt.

VII

Konstruktivistische Wissenschaftstheorien, die die Wissenschaft in Termini der Selbstreferentialität beschreiben, würden den Verweis auf die gesellschaftliche Arbeitsteilung nicht so ohne weiteres als ein Argument in Richtung auf die Skizzierung des spezifischen Charakters von Mathematik akzeptieren, sondern darin eher einen Verweis auf die operative Geschlossenheit, die allen Wissenschaftsdisziplinen gemeinsam ist, sehen. Wie überhaupt prozeßorientierte Interessen an der Wissenschaft eher den Gedanken unterstützen, daß "die im Entstehen begriffene Mathematik jeder anderen Art menschlichen Wissens, das im Entstehen begriffen ist, gleicht" (G. Polya, Mathematik und plausibles Schließen, 1962, 10).

Es müßte jedoch zugestanden werden, daß sich in der Mathematik historisch der aktive, operative Charakter menschlicher Erkenntnis in besonders prononcierter Art und Weise gezeigt hat. Dies wird nicht zuletzt durch die Tatsache dokumentiert, daß der epistemologische Konstruktivismus jüngsten Datums (vgl. Schmidt (Hgb.) 1987) sich die mathematischen Auffassungen des frühen 19. Jahrhunderts angeeignet hat, wie sie in den verschiedenen Konzeptionen einer "Algebra der Logik" (vgl. z.B. Boole, Grassmann) entstanden waren, später von Whitehead oder Husserl gestaltet und interpretiert wurden; und wie sie schließlich neuerdings von G. Spencer-Brown in besonderer Weise weiterentwickelt worden sind. N. Luhmann beschreibt in Anschluß an Spencer-Brown den grundlegenden Erkenntnisakt als Einheit von Unterscheidung und Bezeichnung. "Das Beobachten ist der operative Vollzug einer Unterscheidung durch Bezeichnung der einen (und nicht der anderen) Seite ... Das Unterscheiden - und - Bezeichnen ist als Beobachten eine einzige Operation; denn es hätte keinen Sinn, etwas zu bezeichnen, was man nicht unterscheiden kann, so wie umgekehrt das bloße Unterscheiden unbestimmt bliebe und operativ nicht verwendet werden würde, wenn es nicht dazu käme, die eine Seite (das Gemeinte) und nicht die andere (das Nichtgemeinte) zu bezeichnen." Die Asymmetrie scheint wesentlich zu sein. In der Mathematik sind Gleichungen oder Äquivalenzrelationen symmetrisch, Verknüpfungen oder Funktionen im allgemeinen asymmetrisch. Dadurch wird eine radikal operative Perspektive eingenommen, die es beispielsweise unmöglich macht, und das kommt in der gewollten Asymmetrie zum Ausdruck, auf diesen Elementarakt der Beobachtung die Begriffe von "wahr" oder "unwahr" anzuwenden. Es ist ein Operationalismus, der empirische und mathematische Gegenstände in absolut gleicher, formaler Weise behandelt. Gleichzeitig werden Wissensebene und Wirklichkeit radikal getrennt. "Wenn statt der Welt der Zahlen nach gerade/ungerade (ein Fall, wo offensichtlich Bezeichnung und Unterscheidung zusammenfallen, meine Einfügung M.O.) die Welt der Lebewesen nach weiblich/nichtweiblich unterschieden wird, dann koinzidieren Intensionen des Unterschiedenen (Kriterien oder Merkmale) und Extensionen (Auftreten von Eigenschaften, die den Kriterien entsprechen) nicht automatisch" (W. Krohn/G. Küppers).

Man kann auf diese Weise die Übertragbarkeit des Verfahrens auf empirische Erfahrungsbereiche in Frage stellen. Man kann jedoch ebensogut, anstatt das obige Argument im Sinne einer Differenz von mathematischer und empirischer Erkenntnis zu interpretieren, darin den Ausdruck einer prinzipiellen Differenz von Theorie und Wirklichkeit sehen, die den Theorien einen hypothetischen und zugleich antizipatorischen Charakter verleiht und jede Anwendung derselben zu einem eigenständigen Problem macht, das in der Theorie nicht gelöst werden kann. Es tritt hier wiederum ein Sachverhalt in Erscheinung, auf den in allen Teilen dieses Textes immer wieder und in je unterschiedlicher Weise hingewiesen worden ist. Es ist jeweils eine Unterscheidung zu treffen, ein Schnitt zu legen, aber wo das zu geschehen hat, dafür gibt es keine universell und apriori zu treffenden Feststellungen.

Konstruktivismus und Empirismus (Realismus) treffen ihre grundlegende Unterscheidung zwischen dem "Innen" und dem "Außen" an je unterschiedlicher Stelle und unterliegen entsprechend unterschiedlichen Begrenzungen. Der Konstruktivismus behandelt alle Erkenntnis und alles Wissen als gleichartig. Empirisches wie rationales Wissen haben beide einen formalen Charakter (wobei das Wort *Formalismus* hier im Gegensatz zum Reduktionismus aufzufassen ist im Sinne der Maxime, eine Sache durch sich selbst zu erklären, nicht durch anderes). Diese Gleichbehandlung geht auf Kosten einer prinzipiellen Differenz zwischen Theorie und materieller Realität.

Konstruktivismus versus Empirismus (Realismus) bezeichnet nicht eine Alternative, die ein für allemal zu entscheiden wäre. So wie der Konstruktivismus dazu neigt, sich alles nach einem einheitlichen Modell vorzustellen, alles metaphorisch zu analogisieren – Krohn und Küppers weisen mit Recht darauf hin, daß Luhmann in seiner abstrakten Systemtheorie dabei wesentliche Differenzen der einzelnen Systeme Wissenschaft, Wirtschaft, Recht usf. ignoriert – so vergißt der Empirismus den Zusammenhang zwischen Gegenstand und Tätigkeit, oder zwischen Inhalt und Form der Tätigkeit.

Aber sollte man nicht zunächst fragen, ob eine derartige Alernative überhaupt gegeben ist? Können wir analytische Unterscheidungen treffen, ohne uns gleichzeitig für die eine oder andere Seite des Unterschiedenen zu entscheiden? Oder muß nicht, ganz im Gegenteil, die Einheit von Analyse und Aktion, insbesondere aus soziologischer Sicht vorgetragen, einem merkwürdig erscheinen, insofern eine Identifikation von Unterscheiden und Operieren Erkenntnis auf ein relativ unbewußtes intuitiv-instinktives Synthetisieren reduziert? Während der Empirismus der Wissenschaft auf das reduzieren wollte, "was der Fall ist", um in der Terminologie Wittgensteins zu reden, und die Absicht verfolgte, die Welt aus einfachen wahr/falsch-Sätzen aufzubauen, indem die Gesamtheit dieser Bausteine aus einem vollständigen und konsistenten Axiomensystem für unser Wissen ableitbar sein sollte, betont der Konstruktivismus einen inkommensurablen Pluralismus in der Erkenntnis, und die Distinktion "wahr/falsch" erhält einen bloß operativen Sinn. Ein Satz ist wahr, wenn er formuliert werden kann und im wissenschaftlichen Diskurs seine Fortsetzung durch andere Sätze findet, d.h. wenn er als Mittel funktionalisiert werden kann. Wahrheit findet ihren einzigen Grund in ihrer Funktionalität bei der Konstituierung von psychischen oder sozialen Erkenntnissystemen und verdient ihr Etikett erst dadurch, daß ein derartiges Subjektsystem eine entsprechende "Deckung" durch seine Operationen anbietet.

Betrachten wir das Problem anhand einiger mathematischer Beispiele. Eine mathematische Gleichung $a = b$ wird in der Regel interpretiert in dem Sinne, daß a und b unterschiedliche Aspekte ein und derselben Sache bezeichnen (Frege). Es handelt sich also um zwei intensional verschiedene, aber extensional identische Sachverhalte. Aus konstruktivistischer Sicht, beispielsweise innerhalb eines Kalküls, interessiert an der Gleichheit die Substituierbarkeit, bei Leibniz als Substituierbarkeit "salve veritate", formuliert. Da die Wahrheit nicht von vorneherein bekannt ist, oder überhaupt nicht bekannt ist (vgl. den Hinweis von Krohn und Küppers), kann in epistemischen Kontexten die Substituierbarkeit nicht an die extensionale Übereinstimmung gebunden sein. Aber das Verfahren selbst hat einen Sinn. In der klassischen Mathematik wird im wesentlichen über intensionale Objekte gesprochen. Intensionale Objekte werden zunächst durch ihre Eigenschaften (Definitionsverfahren) charakterisiert – in unserem Beispiel durch die einfache Bezeichnung "a" bzw. "b" –, und es werden dann in einem zweiten Schritt Beziehungen zwischen ihnen festgestellt. "Die Eigenschaften intensionaler Objekte und die Beziehungen, in denen sich diese Objekte befinden, gehören deshalb zu verschiedenen Ebenen der Charakteristik der Objekte: Die ersten weisen auf die Definitionsverfahren der Objekte hin, während die zweiten die schon eingeführten Objekte charakterisieren" (Smirnov 1972, 228). a=b wird dann so verstanden, daß man, eine intensionale Ontologie unterstellend, a und b als *verschiedene* Objekte auffaßt, die in einer Relation stehen bzw. die über eine gemeinsame Eigenschaft verfügen.

Dieses klassische Verfahren drückt die Einheit von Unterscheidung und Bezeichnung aus, durch die der Konstruktivismus charakterisiert ist. Es wird dabei die operative Ebene von der Ebene einer irgendwie unterstellten "objektiven Realität" getrennt. Es kann dann auch nicht in jedem Fall sinnvoll nach einem empirischen Referenten gefragt werden.

Betrachte ich Gleichungen, wie die Wertgleichung, "1 Rock = 2 Paar Schuhe", dann kann ich zwar im Sinne der ersten Interpretation der Gleichheit die einzelnen Waren, Rock und Schuhe, als Repräsentanten ein und derselben Sache, nämlich des ökonomischen Wertes auffassen, aber letzterer kommt nicht anders in die Welt, als durch die verschiedenen Aktivitäten. Substituierbarkeit erweist sich im operativen Kontext als wichtigste Gleichheitsbestimmung, sie kann aber nicht in kontextunabhängiger Weise und apriori gegeben werden. Insofern Rock und Schuhe weitere Eigenschaften aufweisen als die, wertgleiche Waren zu sein, sind sie in anderen Kontexten durchaus nicht gegeneinander austauschbar. Da Rock und Schuhe nicht als sinnliche Erscheinung, sondern als Gegenstände der Tätigkeit, als Gebrauchs- oder Tauschwerte gemeint sind, wandeln sie mit der Tätigkeit ihren Charakter, und es wären im Sinne einer Begründung der Gleichheit die Tätigkeiten selbst zu ordnen und zu hierarchisieren. (Bezüglich der Konsequenz in der klassischen Mathematik und Logik vgl. Whitehead 1898, 18, Orchard 1975, 100).

Anders gesagt: Rock und Schuhe sind austauschbar, weil sie gleichermaßen nützliche Gebrauchsgüter sind, aber die Relationen, in denen sie austauschbar sind, bestimmt sich nicht in dieser Austauschaktivität, sondern bestimmt sich in der Produktion und durch den zur Herstellung dieser Gebrauchswerte nötigen jeweiligen Aufwand. In der Produktion bestimmt sich ihre Verschiedenheit und das Maß ihrer Vergleichbarkeit oder Substituierbarkeit.

In der mengentheoretischen Grundlegung der Mathematik (die natürlicherweise schon vor ihrer Explizierung durch Cantor praktiziert worden ist) werden aus diesem Grund die Objekte, von denen die Theorieentwicklung ausgeht, als schlechthin verschieden voneinander aufgefaßt, ohne daß diese Verschiedenheit durch irgendwelche Eigenschaften der Objekte begründet würde. Eine abstrakte Menge ist eine Gesamtheit von Dingen, die keine weiteren Eigenschaften haben. Die Gesichtspunkte der Betrachtung, oder anders gesagt: die gegenständlichen Aspekte der als schlechthin verschieden genommenen Grundobjekte treten dann als Relationen zwischen ihnen und weiterhin als Relationen von Relationen usf. in Erscheinung, von welchen aber ebenfalls zunächst nur festgestellt wird, ob sie zutreffen oder nicht. Wollte man die zweite der genannten Auffassungen der Gleichung formalisieren, dann böte sich die Darstellung der Gleichheit als Gleichheit von Funktionswerten $F(a) = F(b)$ einer geeigneten Funktion F an. Damit wäre das Problem "eine Etage höher", nämlich in die Frage nach der Identität von Funktionen verschoben. Das Problem dieser Identität, d.h. die Frage der funktionalen Äquivalenz ist untrennbar mit dem Problem der Intentionalität verbunden (vgl. Otte 1988 f.). Hier zeigen sich dann die Grenzen der Formalisierbarkeit.

Der Unterschied der beiden Auffassungen der Gleichung $a=b$ resultiert aus unterschiedlichen Vorstellungen über die Grundlagen der Erkenntnis. Einmal sind diese Grundlagen scheinbar objektiv gegeben, existieren die Gegenstände der Erkenntnis an sich, zum anderen geht man davon aus, daß Objekte und Relationen gemeinsam die Grundlagen des Wissens abgeben, die zirkulär aufeinander bezogen sind, d.h. letztes Fundament ist eigentlich die Tätigkeit. Im ersten Fall haben wir also eine Vorstellung von Mathematik als Wissen über eine gegebene Welt, im zweiten Fall erscheint die Mathematik eher als eine Aktivität.

Ein Punkt im geometrischen Kontinuum ist nach Euklid etwas, was keine Teile hat, demnach wörtlich genommen, ein Individuum ohne charakteristische Eigenschaften. Entsprechend dem Leibnizschen "Ununterscheidbarkeitssatz" (principium identitatis indiscernibilium) (Lorenz, 1969) ist es also nicht möglich, einen Punkt von einem anderen zu unterscheiden, und Leibniz glaubte daher, daß weder Punkte noch Atome oder dergleichen eine reale Existenz besitzen. Man kann jedoch genau den umgekehrten Standpunkt einnehmen. Da Punkte keine Eigenschaften haben, erscheinen sie als das schlechthin Verschiedene. Zwei Punkte im Raum zu markieren, ist die Bezeichnung eines Unterschieds, ohne sich festzulegen, worin der Unterschied besteht; gewissermaßen die Bezeichnung eines Unterschieds ohne sachlichen Grund. Diesen Standpunkt nimmt die reine Mathematik seit dem 19. Jahrhundert ein. Mathematische Begriffe (z.B. die Zahlen) sind diesem Standpunkt zufolge "freie Schöpfungen des menschlichen Geistes", die dazu dienen, "die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen" (Dedekind 1887).

Sowohl der Leibnizsche Ununterscheidbarkeitssatz wie auch das Prinzip der Identität durch Substituierbarkeit können im Sinne einer Kontextabhängigkeit der Gleichheit aufgefaßt werden. Im Falle des Ununterscheidbarkeitssatzes sieht man die Abgrenzung verschiedener Kontexte jedoch als objektiv bestimmt. Das Subjektive liegt gewissermaßen in der Auswahl derselben bzw. in der Grenze der Fähigkeiten des Subjekts, die Analyse bis zu den unterscheidenden Merkmalen hin durchzuführen. Gott allein ist, so Leibniz, in der Lage, die Analyse bis zu ihrem wirklichen Ende durchzuführen.

Im zweiten Fall, d.h. in der Betonung der Verschiedenheit ohne benannten Unterschied, will sich das Subjekt die Perspektive der Betrachtung, die Bestimmung des je relevanten Kontextes vorbehalten.

Das in der Gleichung ausgedrückte Problem der Identität mathematischer Objekte wird jeweils aus einem unterschiedlichen Blickwinkel akzentuiert und gesehen. Einmal gewinnt man die Identitätskriterien aus der Anschauung der realen Welt und zum anderen aus den Bestimmungen der Intentionalität (möglicherweise hätte man dementsprechend auch, einem Vorschlag Husserls folgend, zwischen Objekt und gegenständlichem Gehalt eines Aktes (Noema) zu unterscheiden)).

Wir sind hier an einen Punkt gekommen, der uns bereits weiter oben anläßlich der Beschreibung der Axiomatik beschäftigt hatte. Insofern man, dem Vorschlag des Konstruktivismus folgend, mathematische Objekte als Aktionsschemata begreift, wird die mathematische Definition oder das axiomatische System zum eigentlichen Gegenstand der Tätigkeit, und es geht dann darum, verschiedene Anwendungen oder Interpretationsfelder für diesen Gegenstand zu finden, etwa in demselben Sinn, in dem bei der konstruktivistischen Auffassung der Gleichung a=b die Intention darauf gerichtet war, gemeinsame Eigenschaften oder Beziehungen zwischen unterschiedlichen Objekten a und b zu finden. Man kann jedoch auch umgekehrt den mathematischen Erkenntnisprozeß als einen Abstraktionsprozeß auffassen und ein Axiomensystem stellt dann eine Perspektive, "ein Fenster" (vgl. Rota u.a. 1985) auf den eigentlichen nicht vollständig expliziten mathematischen Gegenstand dar. Wenn also zwei unterschiedliche Axiomensysteme A und B benutzt werden, um ein und denselben Gegenstand, ein und dasselbe Modell X zu beschreiben, dann "ist der Beitrag des Systems B deshalb wünschenswert, weil er zeigt, was X sonst noch sein kann außer demjenigen, was durch A expliziert wird" (Rota u.a. 1985). Dies entspricht der Auffassung, daß die Gleichung a=b dadurch interessant wird, daß sie auf verschiedene Aspekte a und b ein und desselben Objektes hinweist.

Natürlich kann man sagen, daß im mathematischen Denken beide Auffassungen präsent sein werden. Dennoch beabsichtigt die jeweilige Akzentuierung je anderes und macht je anderes verfügbar. Im einen Fall sind Kohärenz und Verallgemeinerung das eigentliche Ziel der Erkenntnis; in der konstruktivistischen Sicht geht es dagegen um die Steigerung der Anwendungsmöglichkeiten des mathematischen Systems durch die Steigerung interner Differenzierung und Komplexität. Bezogen auf das bereits diskutierte Problem des Verhältnisses von "Innensicht" und "Außenbeziehungen" der Mathematik kann man nun feststellen, daß es sich hier um unterschiedliche Mittelebenen mathematischer Tätigkeit handelt. Bezogen auf diese Problematik finden wir gegensätzliche Standpunkte, die verständlich machen, warum die eine oder die andere der genannten Akzentuierungen bevorzugt werden könnte.Beispielsweise betont Durkheim, daß das Wesentliche an den begrifflichen Verallgemeinerungen in ihrem Charakter als kollektive Vorstellungen zu sehen ist. Nur dann fügen sie dem, "was uns unsere persönliche Erfahrung lehren kann, all das hinzu, was die Gemeinschaft an Weisheit und Wissen im Lauf der Jahrhunderte angesammelt hat. ... Eine Sache begreifen heißt, während man ihre wesentlichen Elemente erfaßt, sie gleichzeitig in eine Gesamtheit einzupassen" (Durkheim 1981, 582).

Anstatt das letztere aber in dem Sinn zu akzentuieren, daß begrifflich Denken heißt, "das Veränderliche dem Beständigen unterzuordnen, das Individuelle dem Sozialen" (a.a.O., 587) könnte man den Charakter der Begriffe als Mittel betonen, als Mittel, die dem individuellen Subjekt gesellschaftliche Erfahrung verfügbar machen. Luhmann thematisiert das Verhältnis von Individuum-Gesellschaft als System/Umwelt-Differenz. Mensch und Gesellschaft sind in dieser systemtheoretischen Sichtweise jeweils Umwelt füreinander bzw. Teile der Umwelt. Dabei geht die Systemtheorie aber von einer Einheit von System und Umwelt aus und Umwelt "ist für das System nicht weniger wichtig als das System selbst" (Luhmann 1984, 289). Und es beruht in Luhmanns Theorie die Logik dieses Zusammenhangs von System und Umwelt auf der Selbstreferentialität der Systeme, d.h. darauf, daß die Systeme zu ihrer eigenen Konstitution die Differenz von System und Umweltsystem intern als Orientierung benutzen müssen. Wenn man schließlich berücksichtigt, daß ein selbstreferentielles System "nur den Umweltkontakt (hat), den es sich selbst ermöglicht, und keine Umwelt "an sich"" (Luhmann 1984, 146), dann kommt die Bedeutung der Mittel aufs neue in den Blick. Überhaupt bleibt für unser Thema das Mittel/Gegenstands-Verhältnis bestimmend, aber wir benötigen das Problem des gesellschaftlichen Charakters von Erkenntnis, um diesem Verhältnis seinen angemessenen analytischen Stellenwert zuweisen zu können. Erst der soziale Bezug hat, so scheint es, im Selbstverständnis der klassischen Wissenschaft eine Polarisierung hervorgetrieben, die die traditionelle Bewußtseinsphilosophie zwar permanent beschäftigt hat, die aber andererseits dennoch, insbesondere wenn man ihre Ursprünge in die Erkenntnistätigkeit zurückverfolgt, irgendwie vorläufig und unklar zu sein scheint.

Dem sogenannten radikalen Konstruktivisumus geht es nicht um die einfache Behauptung des operativ-konstruktiven Charakters wissenschaftlicher Erkenntnis, sondern um die Behauptung, daß die Wirklichkeit in ihren Grundlagen selbst konstruktiv erzeugt wird. Auch eine synthetisch-intuitiv operierende Existenz, die sich einerseits in die Natur eingebettet sieht und andererseits danach trachtet, sie zu beherrschen, konstruiert. Natur oder generell Welt oder Wirklichkeit erscheint dieser Existenz, so wie Kant es beschrieben hat, als eine nicht endende Kette von Kausalverknüpfungen in den Erscheinungen, in der nichts sein kann, "welches eine Reihe schlechthin und von selbst anfangen könnte. ... Eine ursprüngliche Handlung, wodurch etwas geschieht, was vorher nicht war, ist von der Kausalverknüpfung der Erscheinungen nicht zu erwarten." Daher dann die Spaltung in empirische und transzendentale Subjektivität, wodurch einerseits die Handlungen des Subjekts "als Erscheinungen durch und durch mit anderen Erscheinungen nach beständigen Naturgesetzen im Zusammenhange ständen und von ihnen als ihren Bedingungen abgeleitet werden könnten ..." und andererseits das Subjekt auch "die Ursache jener Handlungen als Erscheinungen" ist, welches als diese Ursache selbst "unter keinen Bedingungen der Sinnlichkeit steht und selbst nicht Erscheinung ist" (A 540; Kant, Kritik B 572/A 544).

Die Wirklichkeit ist dieser Existenz wechselweise unendlicher Widerstand oder unendliches Reservoir an Möglichkeiten. Sollte man aber davon ausgehen, daß die Natur, wie sie uns interessiert, von uns gemacht ist - und Ozonloch, Tschernobyl u.ä. machen eine solche Annahme plausibel - dann hätten wir unserem Denken und unserer Anschauung eine wesentlich abstraktere Wirklichkeit relationaler Systeme zu unterlegen. Dies ist nur möglich, wenn wir uns in allen unseren Lebensäußerungen radikal auf den *vermittelten* Charakter unserer Wirklichkeit einstellen. Es ist hier nicht der Ort, die Implikationen einer solchen Feststellung umfassender zu entwickeln. Wiederholt werden soll an dieser Stelle lediglich die Feststellung, daß das Subjektverhältnis (wird es nun durch die Dualität empirisch/transzendental oder durch die andere endlich/unendlich bezeichnet) temporalisiert wird, wenn auch nicht in einer Weise, die Erkenntnis insgesamt nur als sofort wieder verschwindende Operation erscheinen läßt.

Für die Mathematik jedenfalls bleiben die Schwierigkeiten zu sehen, daß selbst in einer konstruierten Welt dennoch die (konstruktive) Erkenntnis nicht bloß intuitiv synthetisch sein kann. Selbst dort, wo "verstehen" meint, "herstellen können", bleibt die andere Einsicht bedeutungsvoll, die nämlich, daß man seine eigenen Konstruktionen von einem bestimmten Punkt an nicht mehr bloß intuitiv beherrscht. Gerade die begrifflich operierende Mathematik hatte - man denke an das Beispiel der Entwicklung der mathematischen Funktionentheorie - Differenzierung auf Differenzierung gehäuft und damit nicht nur eine gewaltige Expansion mathematischer Tätigkeit hervorgerufen, sondern gleichzeitig eine "Krise der Anschauung" (Volkert 1986), die erst mit der Verfügbarkeit neuer Mittel (Computer) und dadurch vermittelter Anwendungen behoben wurde (Mandelbroit). Es gibt keinen Weg zurück hinter eine evolutionäre Sicht. Die Formulierung des Allgemeinen aber oder der "endgültigen" Wahrheit formuliert eigentlich nur die Perspektive des Subjekts als eines bereits fertigen. Es ist, wie Bateson sagt, der Kontext, der sich entwickelt: "Gewiß entwickelten sich die Grasebenen ihrerseits pari passu mit der Evolution der Zähne und Hufe der Pferde und anderer Huftiere. Die Grasnarbe war die evolutionäre Antwort der Vegetation auf die Entwicklung des Pferdes. Es ist der

Kontext, der sich entwickelt" (Bateson 1973, 128; 1981, 215).

Könnte man also in Analogie feststellen, daß die mathematische Tätigkeit mit ihren Mitteln und Gegenständen der Kontext ist, der sich entwickelt?

Anstelle einer Zusammenfassung eine weitere Frage

Die Kantische Trennung von analytischen und synthetischen Wissenschaften und seine Lehre von der Kritik ist insofern problematisch, als man nicht sagen kann, man untersucht eine Sprache, ohne das darin Gesagte, oder man untersucht Begriffe, ohne die Realität, die sich in diesen Begriffen widerspiegelt (so die Kritik von Quine an Kant). Wäre es nicht in ähnlichem Sinne auch falsch, von einem Ingenieur, der die technische Zeichnung einer Maschine studiert, zu sagen, er studiert die Zeichnung, nicht die Maschine? Es scheint allerdings ein ebenso offensichtlicher Fehler zu sein, die Zeichnung mit der Maschine, oder die Landkarte mit der Landschaft, oder das Wissen mit der Wirklichkeit zu verwechseln. G. Bateson (Bateson 1982) hat wiederholt auf diesen Fehler hingewiesen, um die damit verbundene Tendenz zu kritisieren, umfassende Synthesen unserer Erfahrung und unseres Wissens herzustellen, Modelle der ganzen Welt aufzustellen und so einen gewissen Determinismus und Objektivismus in unser Denken einzuführen. Es kommt tatsächlich auf die Ebene der Betrachtung an. Geht man vom Standpunkt einer einzelnen Wissenschaft, wie der Mathematik aus, so muß man natürlicherweise glauben, daß sie wahre Erkenntnisse anstrebt, und dies auch erreichen kann, indem sie mit Hilfe ihrer Begriffe die Realität studiert. Auf der anderen Seite erscheinen, von außen gesehen, die Unvollkommenheiten und die nur begrenzte Funktionalität jeder einzelnen Wissenschaft und der Wissenschaften insgesamt.

Als Schlußfolgerung kann man den formulierten beiden Fragen eine *dritte* hinzufügen, nämlich die Frage, wie sich die Grundlagenkrise des ausgehenden 18. und beginnenden 19. Jahrhunderts von derjenigen, die 100 Jahre später begann, unterscheidet. Ein gemeinsamer Bezugspunkt dieser beiden "Grundlagenkrisen" der Mathematik war sicherlich die steigende Komplexität der Erkenntnisprozesse, d.h. die wachsende Anzahl wissenschaftlich bearbeiteter Gegenstände bzw. die zunehmende Pluralität der Perspektiven auf die Wirklichkeit. Möglicherweise stand zu Beginn des 19. Jahrhunderts das gegenständliche Problem im Vordergrund, und es ging darum, ein neues, erweitertes Verständnis vom Gegenstand mathematischer Theorie-bildung zu entwickeln. In diesem Sinne ist die "Geometrisierung" der Mathematik, und damit verbunden die zentrale Bedeutsamkeit von Begriffen, wie "Dimension", "Mannigfaltigkeit", "Menge" usf. zu verstehen. Mit steigender Spezialisierung und Arbeitsteilung auch innerhalb der Mathematik und entsprechender weiterer Erhöhung des Abstraktionsniveaus ergab sich die Frage nach den Forschungsmitteln, nach den Prinzipien des Zugangs zum Untersuchungsobjekt als eine weitere zentrale Frage. Darüber hinaus wird die Beschäftigung mit der Wissenschaft zu einem Massenberuf. Das erfordert eine detailierte Reglementierung der Arbeit auf den verschiedenen Ebenen, um Standardformen der Darstellung des wissenschaftlichen Ergebnisses zu gewährleisten.

Zu der Frage nach der Natur mathematischer Objekte tritt nun zusätzlich die Frage nach der Natur mathematischer Beweise und nach den Kriterien ihrer Korrektheit und Zulässigkeit hinzu. (Ist ein mit dem Computer geführter Beweis, den kein Mensch nachvollziehen kann, ein vollgültiger Beweis oder nicht? Darüber gehen die Meinungen der Mathematiker weit auseinander.) Diese Entwicklung kann man als eine Methodologisierung der Wissenschaften auffassen (Judin 1976).

Die Frage entsteht, wie hängt diese Entwicklung mit der zu Beginn des 19. Jahrhunderts zusammen? Während des 18. Jahrhunderts versuchte man, die Mathematik durch ihren elementaren Teil, also reduktionistisch, zu begründen. Dies führte zu einem Auseinanderfallen von Begründung und Entwicklung der Mathematik, das so weit ging, daß schließlich Methode und Gegenstand keinerlei Zusammenhang mehr aufwiesen. Dies kommt selbst in der Kantischen Auffassung zum Ausdruck, derzufolge Philosophie und Mathematik sich nicht durch ihren Gegenstand, sondern nur durch ihre Methode unterscheiden. Es führte insbesondere auch dazu, daß Methodologie im Kantischen Sinne Erkenntniskritik durch Analyse der Begriffe ohne gegenständlichen Bezug wurde.

Cantors Werk war eine direkte Reaktion auf die Krise der Mathematik zu Beginn des 19. Jahrhunderts. Husserls Phänomenologie reflektierte diesen neuen Standpunkt, aber wie im Falle Kants, verlängerte auch hier die philosophische Reflexion die Entwicklung bis zu einem Extrempunkt, an dem ihre Unzulänglichkeiten deutlich werden. Husserls Phänomenologie ist antikantianisch bezüglich des mit dem Ding-an-sich verbundenen Skeptizismus Kants, aber sie weist damit ex negativo auf die Problematik der heutigen Wissenschaft hin. Form und Inhalt der mathematischen Tätigkeit sind weder zu identifizieren noch zu trennen. Das impliziert die gegenüber Husserl gewendete

Feststellung, daß die Beziehungen der Wissenschaften zueinander durch die historische Entwicklung bestimmt sind und nicht durch eine "allgemeine Logik"

Universität Bielefeld

ACKNOWLEDGMENTS

Ich danke H. Dinges, K.-N. Ihmig, W. Krohn, H.N. Jahnke und F. Seeger für hilfreiche Diskussionen zu einer früheren Version dieses Papiers.

LITERATUR

Aggazi, E., 1974. The Rise of the Foundational Research in Mathematics. *Synthese* 27, 7-26.

Bateson, G., 1973. *Steps to an Ecology of Mind*. Paladin Frogmore (deutsch 1981).

Becker, O., 1959. *Größe und Grenze der mathematischen Denkweise*. Freiburg, Verlag Karl Alber.

Bekemeier, B., 1986. Martin Ohm (1792-1872), *Universitätsmathematik und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform*. Göttingen.

Bernal, J.D., 1965. *The Social Function of Science*.

Beth, E./J. Piaget, 1966, *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht.

Bloor, D., 1976. *Knowledge and Social Imagery*. London, Routledge & Kegan Paul.

Bos, H./H. Mehrtens, 1977. The Interactions of Mathematics and Society. *Historia Mathematica* 4, 7-30.

Boutroux, P., 1920. *Das Wissenschaftsideal der Mathematiker*. (Reprint Sändig, Wiesbaden 1968).

Boyer, C.B., 1956, History of Analytic Geometry. New York.

Cantor, G., 1980. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Heidelberg, Springer.

Castonguay, Ch., 1972. *Meaning and Existence in Mathematics*. New York.

Crowe, M., 1975. Ten "laws" concerning Patterns of Change in the History of Mathematics. *Historia Mathematica* 2, 161-166.

Daston, L., 1986. The Physicalist Tradition in Early 19th Century French Geometry. *Stud. Hist. Phil. Sci.* 17, 269-295.

Davis, Ph./R. Hersh, 1981. *Mathematical Experience*. Boston.

Diderot, D., *Ästhetische Schriften*, 2 Bde. Berlin.

Durkheim, E., 1981. *Die elementaren Formen des religiösen Lebens*. Frankfurt.

Einstein, A., 1953, 'Geometry and Experience', H. Feigl/M. Brodbeck (eds.), *Readings in the Philosophy of Science*. New York, 189–195.

Feher, M., 1981. Some Remarks on Meaning Invariance and Incommensurability. *Science of Science* 2, 339–346.

Folta, J., 1987. Die Entwicklung der Geometrie im 19. Jahrhundert und die Entstehung geometrischer Schulen. *NTM* 24, 29–42.

Foucault, M., 1971. *Die Ordnung der Dinge*. Frankfurt.

Fraser, C.G., 1987. J.L. Lagrange's Algebraic Vision of the Calculus. *Historia Mathematica* 14, 38–53.

Gajdenko, P., 1987. Die neuzeitliche Wissenschaft als Problem der transzendentalen Phänomenologie Husserls, in G. Kröber/H.P. Krüger (Hrg.), *Wissenschaft – das Problem ihrer Entwicklung*. Berlin (DDR).

Gleick, J., 1987. *Chaos, Making a new Science*. New York, Viking.

Grassmann, H., *Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*. F. Engel (Hrg.), Bd. I.1. Leipzig 1894 (enthält die "Ausdehnungslehre" von 1844 und die "Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik" von 1847); Bd. I.2. Leipzig 1896, Die Ausdehnungslehre von 1862.

v.Harten, G. u.a., 1986. *Funktionsbegriff und funktionales Denken*. Aulis-Verlag, Köln.

Hegel, G.W., 1969. *Wissenschaft der Logik*. Frankfurt, Suhrkamp.

Hilbert, D., 1925. Über das Unendliche. In *Mathem. Annalen* 95(1925), 161–190.

Hölder, O., 1924, *Die mathematische Methode*. Berlin.

Husserl, E., 1928. *Logische Untersuchungen*. Bd. 1, 4. Aufl. Halle.

Husserl, E., 1962. Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale phänomenologische Philosophie. W. Biemel (Hrg.) *Husserliana Gesammelte Werke* Bd. VI. 2. Aufl. Haag, Martinus Nijhoff.

Husserl, E., 1886–1901. Studien zur Arithmetik und Geometrie. *Husserliana*, 1983, Bd. XXI. The Hague, Martinus Nijhoff.

Israel, G., '"Rigor" and "Axiomatics" in Modern Mathematics', *Fundamenta Scientiae*, Bd. 2, 205–219.

Jahnke, H.N., 1978. *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik – Beweisen als didaktisches Problem*. Diss. Studien Band 10, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld.

Judin, E.G., 1978. *Systemvorgehen und Tätigkeitsprinzip – Methodologische Probleme der modernen Wissenschaft*. Moskau (russ.).

Kitcher, Ph., 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford.
Kolata, G., 1982. Does Gödel's Theorem Matter to Mathematics. *Science*, Bd. 218, 779–780.
Krohn, W./G. Küppers. 1988. *Die Selbstorganisation der Wissenschaft*. Universität Bielefeld, USP Wissenschaftsforschung.
Kuhn, Th., 1967. *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen*.
Leibniz, G.W., 1966. *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*. E. Cassirer (Hgb.) 3. Aufl., Hamburg.
Lorenz, K. 1969. Die Begründung des principium identitatis indiscernibilium. *Studia Leibnitiana*, Supplementa 3, 149–159.
Luhmann, N., 1984. *Soziale Systeme*. Frankfurt a.M.
Manin, Y., 1981. *Mathematics and Physics*. Basel, Birkhäuser.
Markus, G., 1986. *Language and Production*. Dordrecht, Reidel.
Mehlberg, J.J., 1962. 'A Classification of Mathematics Concepts', *Synthese* 14, 78–86.
Mehrtens, H., 1976. Kuhn and Mathematics. *Historia Mathematica* 3, 297–320.
Mormann, Th., 1986. Zur Frühgeschichte des funktionalen Denkens - Oresmes Konfigurationslehre und Galileis geometrische Naturwissenschaft. In G. v. Harten u.a. 1986, 5–20.
Orchard, R.A., 1975. On the Laws of Form. *Int. Journ. General Systems* 2, 99–106.
Otte, M. (ed.), 1974, *Mathematiker über die Mathematik*, Heidelberg, Springer.
Otte, M., 1978. Zur Frage der Entwicklung theoretischer Begriffe. Einleitungs essay zu, Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem von H.N. Jahnke; in *Materialien und Studien* Band 10, 1978 (I-XXI), Dissertation. Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld. Wiederabgedruckt in englischer Sprache, On the Question of the Development of Theoretical Concepts. *Communication & Cognition*, Bd. 13(1), 1980 (63–76).
Otte, M., 1985. Theorie, Computer und Bildung. *JMD* 6(1985), 161–186.
Otte, M., 1986a. Martin Ohms "Geist der Analysis" im Kontext des 19. Jahrhunderts. Einleitungsessay zu B. Bekemeier 1986.
Otte, M., 1986b. Wege durch das Labyrinth. *Düsseldorfer Debatte* 12/1986, 58–70.
Otte, M., 1987. Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert in Deutschland. Manuskript, Bielefeld.
Otte, M., 1988a. The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz (erscheint in *Historia Mathematica*).
Otte, M., 1988b. Arithmetics and Geometry - Some Remarks on the

Concept of Complementarity. Erscheint in *Philosophy and Science Teaching (Synthese)* 1990, 35 S.

Otte, M., 1988c. Alan Turing (1912-1954). *Düsseldorfer Debatte* 6-7/1988, 56-60.

Otte, M., 1988d. Wissenschaft, Bildung und Technik. *Klagenfurter Beiträge zur Technikdiskussion*, Heft 16.

Otte, M., 1988e. "Stil" als historische Kategorie. (Manuskript)

Otte, M., 1988f. Stichwort "Funktion". Erscheint in (Hrg. H.J. Sandkühler), *Enzyklopädisches Wörterbuch des philosophischen Wissens*, Köln.

Paul, M., 1980. Gaspard Monges "Geometrie descriptive" und die Ecole Polytechnique - Eine Fallstudie über den Zusammenhang von Wissenschafts und Bildungsprozess. Diss. Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik.

Piaget, J., 1974. *Abriß der genetischen Epistemologie*. Freiburg.

Poincaré, H., 1904. *Wissenschaft und Hypothese*. Übersetzt von F. u. L. Lindemann. Leipzig.

Post, E., 1936. Finite Combinatory Processes. *Journal of Sym. Logic*, Bd. 1.

Putnam, H., 1975. The Meaning of Meaning. *Phil. Papers*, Bd. 2, CUP, 215-271.

Reidemeister, K., 1958. Mathematik und Erkenntnistheorie. In *Studium Generale*, Bd. 2. Heidelberg.

Rorty, R. 1980. *Philosophy and the Mirror of Nature*. Princeton, Princeton University Press.

Rota, G.-C./D.H. Sharp/R. Sokolowski, 1985. *Syntax, Semantics and the Problem of the Identity of Mathematical Objects*. (Manuskript).

Schelling, F.W.J. 1802/03. G.W.F. Hegel. *Kritisches Journal der Philosophie*. S. Dietzsch, ed. Berlin, Verlag deb., 1985.

Schmidt, S.J. (Hrg.), 1987. *Der Diskurs des radikalen Konstruktivismus*. Frankfurt a.M., Suhrkamp.

Schnabel, F., 1985. Deutsche Geschichte im 19. Jahrhundert. 4 Bde. Reprint *dtv*.

Scholz, E., 1980. *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Rieman bis Poincaré*. Basel, Birkhäuser.

Spencer-Brown, G., 1979. *Laws of Form*. New York, Dutton.

Stichweh, R., 1984. *Zur Entstehung des Systems wissenschaftlicher Disziplinen. Physik in Deutschland 1740-1890*. Frankfurt a.M., Suhrkamp.

Tarski, A., 1969. Truth and Proof. *Scientific American* 220, 63-77.

Turing, A., 1950, 'Computing Machinery and Intelligence', *MIND* LIX, 433-460.

Wang, H., 1970, 'The Axiomatization of Arithmetic', ders. *Logic, Computers and Sets*, New York.

Wang, H., 1981, *Popular Lectures on Mathematical Logic*. New York, Van Norstrand.

Webb, J.C. 1980. *Mechanism, Mentalism, and Meta-Mathematics*, Dordrecht.

Weizenbaum, J., 1977. *Die Macht der Computer und die Ohnmacht der Vernunft*. Frankfurt.

Weyl, H., 1966. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, München.

Weyl, H., 1968, *Gesammelte Abhandlungen*, 4 Bände. Heidelberg, Springer.

Whitehead, A.N. 1898. *Universal Algebra*. Cambridge, University Press.

Wygotskij, L.S., 1985. Ausgewählte Werke. Köln.