L'Implication Logique et la Déduction Naturelle

Nous avons essayé de montrer, dans un article paru dans la présente revue (1), qu'il convient d'ajouter certaines restrictions à celles que Belnap et Anderson ont imposées à l'application de l'une des principales règles de déduction du système E′, la règle d'introduction de l'opérateur de l'implication (2).

Nous avons tenté, dans cet article, de prouver ce qui suit :

Soit une inférence d'une formule b à partir d'une suite de formules $a_1, .. ,a_n$ (au cours de laquelle il a été fait usage de chacune des prémisses $a_1, .. ,a_n$).

Cette inférence est incorrecte (et n'autorise pas de ce fait l'application successive de la règle (I ---))

à la prémisse a_n et à b, à la prémisse
a_{n-1} et à a_n ---) b, .., à la prémisse
a_1 et à a_2 ---) (.. ---) (a_n ---) b) ..))

1) si, au cours de la déduction, une des prémisses a_i a été dérivée en utilisant non seulement a_i mais aussi une ou plusieurs autres prémisses ou 2) si, au cours de l'inférence, la formule b a été déduite à partir d'une sous-suite (stricte) de la suite $a_1, .. ,a_n$.

Nous nous proposons ici de montrer d'abord que d'autres restrictions doivent être imposées à la règle (I ---)) et ensuite que la déduction naturelle présente un aspect historique qui n'est pas sans importance.

I

La formule suivante

(1) (A1 ---) A2) ---) [(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)],

(1) « L'implication matérielle et l'implication logique », v. 5, 1967, p. 33-45.
(2) Nous la dénommerons « règle (I ---)) ».

où A1, A2 et A3 sont, respectivement, les formules

q ---) r,
p ---) r
et (r ---) q) ---) (p ---) q),

est un théorème du système E′.

On dérive comme suit la formule

(2) [(p ---) q) ---) (A1 ---) A2)] ---)
[(p ---) q) ---) [(A2 ---) A3) ---)
(A1 ---) A3)]]

à partir de (1) :

(1)	1 (1re p.) [3]
(p ---) q) ---) (A1 ---) A2)	2 (2me p.)
p ---) q	3 (3me p.)
A2 --- A3	4 (4me p.)
p ---) q	5 (3me p.)
(p ---) q) ---) (A1 ---) A2)	6 (2me p.)
A1 ---) A2	7 (6, 5, mp) [4]
(1)	8 (1re p.)
(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)	9 (8, 7, mp)
(A1 ---) A3	10 (9, 4, mp)
(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)	11 (4, 10, (I ---)))[5]
(p ---) q) ---) [(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)]	12 (3, 11, (I ---)))
(2)	13 (2, 12, (I ---))).

La formule (2) est donc démontrable dans le système E′.

La formule

(3) (p ---) q) ---) (A1 ---) A2)

(3) 1re prémisse.

(4) La formule 7 est inférée à partir des formules 6 et 5 au moyen de la règle du modus ponens.

(5) La règle (I ---)) est appliquée aux formules 4 et 10.

(c'est-à-dire,

(p ---) q) ---) [(q ---) r) ---) (p ---) r)])

est l'antécédant de la formule (2). Comme (3) est un théorème du système E′, la formule

(4) (p ---) q) ---) [(A2 ---) A3) ---)
(A1 ---) A3)],

qui est le conséquent de (2), en est un aussi.

On infère de la manière suivante la formule

(5) (A2 ---) A3) ---) [(p ---) q) ---)
(A1 ---) A3)]

à partir de (4) :

(4)	1 (1re p.)
A2 ---) A3	2 (2me p.)
p ---) q	3 (3me p.)
(4)	4 (1re p.)
(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)	5 (4, 3, mp)
A2 ---) A3	6 (2me p.)
A1 ---) A3	7 (5, 6, mp)
(p ---) q) ---) (A1 ---) A3)	8 (3, 7, (I ---)))
(5)	9 (2, 8, (I ---))).

La formule (5) est de ce fait prouvable dans le système E′. La formule

(6) A2 ---) A3

(c'est-à-dire,

(p ---) r) ---), [(r ---) q) ---) (p ---) q)])

est l'antécédant de (5). Comme elle est démontrable dans E′, la formule

(7) (p ---) q) ---) (A1 ---) A3),

qui est le conséquent de (5), l'est aussi.

Mais la formule (7) (c'est-à-dire,

(p ---) q) ---) [(q ---) r) ---) [(r ---) q)
---) (p ---) q)]]).

ne peut pas être considérée comme une loi logique.

Supposons en effet que les énoncés A et B soient distincts l'un de l'autre. Substituons dans (7)

A et B à p, A à q et A ou B à r.

Nous obtenons de la sorte la proposition suivante :

(7′) (A et B 1-imp A) [6] l-imp [(A l-imp A ou B) l-imp [(A ou B 1-imp A) l-imp (A et B l-imp A)]].

L'antécédent de (7′) est vrai mais son conséquent ne l'est pas : alors que A ou B est une conséquence logique de A, il ne suit pas, de ce que A est une conséquence logique de A ou B, que A suive logiquement de A et B.

Il résulte de ceci que, dans le cas où la démonstration que nous avons effectuée est correcte, une au moins des formules (1), (2), (3), (4), (5) et (6) n'est pas une loi logique.

Notons que la formule (7) peut être également prouvée comme suit dans le système E′ :

p ---) q	1 (1re p.)
q ---) r	2 (2me p.)
r ---) q	3 (3me p.)
p	4 (4me p.)
p ---) q	5 (1re p.)
q	6 (5, 4, mp)
q ---) r	7 (2me p.)
r	8 (7, 6, mp)
r ---) q	9 (3me p.)
q	10 (9, 8, mp)
p ---) q	11 (4, 10, (I ---)))
(r ---) q) ---) (p ---) q)	12 (3, 11, (I ---)))
(q ---) r) ---) [(r ---) q) ---) (p ---) q)]	13 (2, 12, (I ---)))
(7)	14 (1, 13, (I ---))).

Mais cette démonstration est incorrecte pour les deux raisons suivantes :

1. L'inférence de la formule q à partir de la suite

(s) p ---) q,q ---) r,r ---) q,p,

qui précède l'application de la règle (I ---)) aux formules p et q, contient une déduction explicite de q à partir de la suite

(s′) p ---) q, p,

qui est une sous-suite (stricte) de (s).

2. Au cours de l'inférence de la formule p ---) q à partir de la suite

(s″) p ---) q,q ---) r,r ---) q,

(6) A et B implique logiquement A.

il a été fait usage non seulement de la prémisse p ---) q mais aussi de chacune des deux autres prémisses.

Ceci incite à soupçonner que même si aucune des formules (1), (2), (3) (4), (5) et (6) ne constitue une loi logique, la preuve de la formule (7) que nous avons effectuée initialement n'est pas correcte.

Il est possible, au lieu de dériver la formule (2) à partir de la formule (1) comme nous l'avons fait, de déduire (2) à partir de (1) de la façon qui suit :

(1)	1 (1re p.)
(p ---) q) ---) (A1 ---) A2)	2 (2me p.)
p ---) q	3 (3me p.)
A2 ---) A3	4 (4me p.)
A1	5 (5me p.)
r ---) q	6 (6me p.)
p	7 (7me p.)
p ---) q	8 (3me p.)
(p ---) q) ---) (A1 ---) A2)	9 (2me p.)
A1 ---) A2	10 (9, 8, mp)
(1)	11 (1re p.)
(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)	12 (11, 10, mp)
A2 ---) A3	13 (4me p.)
A1 ---) A3	14 (12, 13, mp)
A1	15 (5me p.)
A3	16 (14, 15, mp)
r ---) q	17 (6me p.)
p ---) q	18 (16, 17, mp)
q	19 (18, 7, mp)
p ---) q	20 (7, 19, (I ---)))
A3	21 (6, 20, (I ---)))
A1 ---) A3	22 (5, 21, (I ---)))
(A2 ---) A3) --- (A1 ---) A3)	23 (4, 22, (I ---)))
(p ---) q) ---) [(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)]	24 (3, 23, (I ---)))
[(p ---) q) ---) (A1 --- A2)] ---) [(p ---) q) ---) [(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)]]	25 (2, 24, (I ---))).

Mais l'inférence de la formule q à partir de la suite

(s1) (1), (p ---) q) ---) (A1 ---) A2), p ---) q,
A2 ---) A3, A1, r ---) q, p,

qui contient une déduction de p ---) q à partir de la prémisse p ---) q et d'autres prémisses, est incorrecte et de ce fait n'autorise pas l'application de la règle (I ---)) aux formules p et q. Et de ceci il résulte que l'inférence de la formule (2) à partir de la formule (1), effectuée de la sorte, est également incorrecte.

Or, la première déduction de (2) à partir de (1) ne diffère que de fort peu de la seconde. Les deux inférences peuvent être pratiquement assimilées l'une à l'autre.

En effet, la formule

(8) A1 ---) A3

affirme que A3 suit logiquement de A1, ou, ce qui revient à peu près au même, que A3 peut être dérivé à partir de A1 (en faisant usage de A1).

Mais si A3 est déductible de cette manière à partir de A1, q peut être inféré à partir de la suite

A1, r ---) q, p

(en utilisant chacune des trois prémisses).

Réciproquement, si q est dérivable de la sorte à partir de la suite

A1, r ---) q, p

A3 peut être déduit à partir de A1 (en faisant usage de A1) et A3 suit logiquement de A1.

Par conséquent, la formule (8) et l'expression

(8′) q peut être inféré à partir de la suite
A1, r ---) q, p
(en utilisant chacune des trois prémisses)

affirment approximativement la même chose.

Il en résulte que dériver (8) à partir de la suite

(s2) (1), (p ---) q) ---) (A1 ---) A2), p ---) q,
A2 ---) A3

revient à déduire (8′) à partir de la suite (s2). Et comme l'inférence de (8′) à partir de la suite (s2) autorise la déduction de la formule q à partir de la suite (s1), l'inférence de (8) à partir de la suite (s2) se confond pratiquement avec la déduction de q à partir de la suite (s1).

Les deux inférences de la formule (2) à partir de la formule (1) peuvent donc être traitées comme identiques l'une à l'autre. La seconde étant incorrecte, la première l'est également.

Il importe par conséquent d'imposer une nouvelle restriction à l'application de la règle (I ---)). Cette restriction peut être formulée comme suit :

Une déduction d'une formule qui a la forme

$$b_1 \text{ ---) } (b_2 \text{ ---) } (.. \text{ ---) } (b_{m-1} \text{ ---) } b_m) ..),$$

où b_m n'est pas une implication [7], à partir d'une suite de formules $a_1, .. a_n$ (au cours de laquelle il a été fait usage de chacune des prémisses $a_1, .. , a_n$) n'est correcte (et n'autorise l'application de la règle (I ---))) que s'il existe une inférence de b_m à partir de la suite

$$a_1, .. , a_n, b_1, .. , b_{m-1},$$

une déduction de

$$b_{m-1} \text{ ---) } b_m$$

à partir de la suite

$$a_1, .. , a_n, b_1, .. , b_{m-2},$$

.. , et une inférence de

$$b_2 \text{ ---) } (.. \text{ ---) } (b_{m-1} \text{ ---) } b_m) ..)$$

à partir de la suite

$$a_1, .. , a_n, b_1$$

qui permettent chacune l'application de la règle (I ---)).

Nous avons vu, dans l'article précité [8], que l'énoncé

(a) Pour toute proposition A, pour toute proposition B et pour toute proposition C

(A l-imp B) l-imp (A l-imp C)

est déductible à partir de

B l-imp C

est faux. (En effet, l'énoncé

(A l-imp A) l-imp (A l-imp A)

n'est pas une conséquence logique de la proposition

A l-imp A).

Nous allons essayer maintenant de montrer que l'énoncé

(b) Quelles que soient les propositions A, B et C, si ces propositions sont différentes l'une de l'autre, alors

(A l-imp B) l-imp (A-imp C)

est dérivable à partir de

B l-imp C

est également faux.

(7) C'est-à-dire, une formule qui a la forme

$$b' \text{ ---) } b''.$$

(8) p. 43.

La formule

(9) (1) ---) (2),

qui a la forme

(B1 ---) B2) ---) [(B3 ---) B1) ---) (B3 ---) B2)],

où B1, B2, et B3 sont, respectivement, les formules

A1 ---) A2,

(A2 ---) A3) ---) (A1 ---) A3)

et p ---) q,

peut être inférée par substitution à partir de la formule

(10) (q ---) r) ---) [(p ---) q) ---) (p ---) r)]

qui est un théorème du système E′.

Soient A et B deux énoncés atomiques (9) distincts l'un de l'autre. Substituons dans la formule (9)

la proposition A et B à la variable p,
la proposition A à la variable q
et la proposition A ou B à la variable r.

Nous obtenons ainsi l'énoncé

(9′) (B1′ l-imp B2′) 1-imp [(B3′ l-imp B1′) 1-imp (B3′ l-imp B2′)],

où B1′, B2′ et B3′ sont des propositions dont la forme est analogue, respectivement, à celle de la formule B1, à celle de la formule B2 et à celle de la formule B3.

L'antécédant de (9′) est l'énoncé.

(1′) (A1′ l-imp A2′) l-imp [(A2′ l-imp A3′) l-imp (A1′ l-imp E3′)],

où A1′, A2′ et A3′ sont des propositions dont la forme est analogue, respectivement, à celle de la formule A1, à celle de la formule A2 et à celle de la formule A3.

L'énoncé (1′) et l'énoncé

(1″) (A2′ l-imp A3′) 1-imp [(A1′ l-imp A2′) 1-imp (A1′ l-imp A3′)]

sont déductibles l'un à partir de l'autre. Par conséquent, si le premier est faux, le second l'est aussi.

(9) C'est-à-dire, des énoncés tels que « Cet objet est une table », « Cet objet est plus petit que cet autre », etc.

Mais si la proposition (1′′) est fausse, l'énoncé (b) l'est également. En effet, la proposition (1′′) peut être obtenue à partir de la formule (10) en substituant aux variables p, q et r des énoncés différents l'un de l'autre.

Supposons donc que les propositions (1′) et (9′) soient toutes les deux vraies. S'il en est ainsi, l'énoncé

(2′) [(A et B l-imp A) l-imp (A1′ l-imp A2′)] l-imp
[(A et B l-imp A)) l-imp [(A2′ l-imp A3′) l-imp
(A1′ l-imp A3′)]],

qui est le conséquent de (9′), est vrai également.

La proposition

(3′) (A et B l-imp A) l-imp [(A l-imp A ou B) l-imp
(A et B l-imp A ou B)]

est l'antécédant de (2′). Comme les énoncés (3′) et

(3′′) (A l-imp A ou B) l-imp [(A et B l-imp A) l-imp
(A et B l-imp A ou B)]

sont logiquement équivalents entre eux, le second est faux dans le cas où le premier l'est.

Mais si la proposition (3′′) est fausse, il en est de même de l'énoncé (b). La proposition (3′′) peut en effet être obtenue à partir de la formule (10) en substituant des énoncés distincts l'un de l'autre aux variables p, q et r.

Supposons donc que la proposition (3′) soit vraie. S'il en est ainsi, l'énoncé

(4′) (A et B l-imp A) l-imp [(A2′ l-imp A3′) l-imp
(A1′ l-imp A3′)],

qui est le conséquent de (2′), l'est également.

L'antécédant de (4′)

(4′a) A et B l-imp A

est une proposition vraie. De ce fait, le conséquent de (4′)

(4′c) (A2′ l-imp A3′) l-imp (A1′ l-imp A3′)

en est une aussi.

Si l'antécédant de (4′c),

(4′ca) (A et B l-imp A ou B) l-imp [(A ou B l-imp A)
l-imp (A et B l-imp A)],

est faux, l'énoncé (b) l'est également.

Supposons que la proposition (4′ca) soit vraie. Dans ce cas, l'énoncé

(4′cc) (A l-imp A ou B) l-imp [(A ou B l-imp A)
l-imp (A et B l-imp A)],

qui est le conséquent de (4′c), est également vrai.

Mais la proposition (4′cc) est fausse : alors que A ou B est une conséquence logique de A, il ne suit pas, de ce que A ou B implique logiquement A, que A soit une conséquence logique de A et B.

L'énoncé (9′) est donc faux. Et de ceci il résulte que la proposition (b) est fausse.

Nous pouvons en conclure qu'il est impossible de systématiser les procédés de déduction ou les énoncés logiquement vrais de la manière usuelle, c'est-à-dire, sous la forme de calculs propositionnels et fonctionnels ou sous la forme de systèmes de déduction naturelle.

II

La formule suivante

(1) (q ---) (p v q)) ---) [(p ---) q) ---) (p ---) (p v q))]

est un théorème du système E′. On la démontre comme suit :

q ---) (p v q)	1 1re p.)
p ---) q	2 (2me p.)
p	3 (3me p.)
p ---) q	4 (2me p.)
q	5 (4, 3, mp)
q ---) (p v q)	6 (1re p.)
p v q	7 (6, 5, mp)
p ---) (p v q)	8 (3, 7, (I ---)))
(p ---) q) --- (p ---) (p v q))	9 (2, 8, (I ---)))
(1)	10 (1, 9, (I ---))).

Si l'on substitue dans (1) un énoncé quelconque, A, à la variable p et un énoncé quelconque, B, à la variable q, on obtient la proposition suivante :

(1′) (B l-imp A ou B) l-imp (A l-imp B) l-imp (A l-imp A ou B)].

L'antécédant de l'énoncé (1′) est vrai mais son conséquent ne l'est pas : il ne suit pas, de ce que A implique logiquement B, que A ou B soit une conséquence logique de A.

Qu'y a-t-il d'incorrect dans la démonstration de la formule (1)? L'inférence de p v q à partir de la suite

(s) q ---) (p v q), p ---) q, p,

qui précède l'application de la règle (I ---)) aux formules p et p v q, contient une déduction de p v q à partir de la suite

(s') p,

mais qui n'a pas été effectuée d'une façon explicite (La formule p v q n'a pas été dérivée à partir de la suite (s') au moyen de la règle

$$\frac{p}{p \vee q}$$

par exemple). Cette déduction constitue néanmoins une partie de l'inférence de p v q à partir de la suite (s).

La déduction de p v q à partir de la suite (s') (ou à partir de p) est une inférence triviale. En effet, dans la plupart des systèmes, une règle primitive ou dérivée permet de déduire p v q à partir de p.

Si le caractére incorrect de l'inférence de p v q à partir de la suite (s) (et de la preuve de la formule (1)) réside réellement dans le fait qu'elle contient une déduction triviale de p v q à partir d'une sous-suite (stricte) de la suite (s), on est en droit de se demander s'il ne convient pas de traiter comme incorrecte toute inférence (d'une formule b à partir d'une suite de formules $a_1, .. ,a_n$) qui possède la propriété suivante :

> Elle est constituée, partiellement, par une suite de formules dont il a été démontré antérieurement qu'elle consiste en une déduction (correcte) de b à partir d'une sous-suite (stricte) de la suite $a_1, .. ,a_n$.

Et si une telle inférence est incorrecte, on est contraint d'admettre que la déduction naturelle a une dimension historique ; d'une manière plus précise, on doit reconnaître que certaines inférences sont correctes ou non selon que d'autres inférences ont été précédemment effectuées ou non.

Ainsi, supposons que l'on ait déduit l'énoncé B à partir d'une suite de propositions

(s'') $B_1, .. ,B_n$

(en ayant fait usage de chacune des prémisses $B_1, .. ,B_n$). Supposons aussi que l'on ait dérivé antérieurement l'énoncé B à partir d'une sous-suite (stricte) de la suite (s'') (ou que l'on ait prouvé précédemment, d'une façon ou d'une autre, que B est déductible à partir d'une sous-suite (stricte) de (s'')).

Dans ce cas, l'inférence de B à partir de la suite (s''), même si elle est correcte à tous les autres points de vue, n'autorise pas l'application successive de la règle (I ---)) à B_n et à B, à B_{n-1} et à B_n l-imp B, etc.

Supposons, par contre, que l'on n'ait pas déduit antérieurement la proposition B à partir d'une sous-suite (stricte) de (s'') (et que l'on n'ait pas non plus démontré précédemment, d'une autre manière, que B est dérivable à partir d'une sous-suite (stricte) de (s'')). Dans ce cas, l'inférence de B à partir de (s''), si elle est correcte à tous les autres points de vue, permet l'application successive de la règle (I ---)) à B_n et à B, à B_{n-1} et B_n l-imp B, etc.

(De même, lorsqu'on a dérivé un énoncé (ou une fonction propositionnelle) B à partir d'une proposition (ou d'une fonction propositionnelle) A dans un système S, qui n'est pas purement logique (c'est-à-dire, lorsqu'on a déduit B à partir de A et d'un ou de plusieurs axiomes de S), on est en droit ou non de traiter

Si A, alors B

comme un théorème de S suivant que l'on a démontré B antérieurement ou non dans S).

Mais, dira-t-on, s'il en est effectivement ainsi, il est des énoncés qui sont tantôt vrais et tantôt faux.

Supposons que l'on ait inféré (correctement) la proposition C à partir des énoncés A et B. Supposons aussi que l'on n'ait pas prouvé précédemment que C est déductible à partir d'une sous-suite (stricte) de la suite A, B. On est alors autorisé à voir dans

A l-imp (B l-imp C)

un énoncé vrai.

Supposons maintenant que l'on ait réussi, par la suite, à dériver (correctement) C à partir de B. On est alors en droit de considérer

A l-imp (B l-imp C)

comme une proposition fausse.

En fait, si la déduction naturelle a réellement une dimension historique, le rapport de conséquence (ou d'implication) logique est, partiellement du moins, relatif aux données (ou à certaines des données) dont on dispose.

Avant d'avoir inféré C à partir de B, on dispose de données par rapport auxquelles

B l-imp C

est une conséquence logique de A.

Après avoir dérivé C à partir de B, on dispose de données relativement auxquelles A n'implique pas logiquement

B l-imp C.

(Remarquons que si, au lieu de recourir à la locution

implique logiquement

(ou à l'expression

il suit logiquement de),

on se servait de la locution

si, alors,

on pourrait probablement traiter

Si A, alors (si B, alors C)

comme un énoncé correctement construit dans le contexte que constituent les données dont on dispose initialement et comme une expression qui n'est pas une proposition correctement construite dans le contexte que constituent les données dont on dispose par la suite.

De même, lorsqu'on est parvenu à démontrer l'énoncé (ou la fonction propositionnelle) B dans un système qui n'est pas purement logique, on est sans doute en droit de considérer

Si A, alors B

comme une expression qui n'est pas un énoncé correctement construit dans le contexte que constitue la suite des preuves déjà effectuées.

Il est en effet très probable qu'au même titre que le rapport de conséquence logique, la propriété d'être un énoncé correctement construit est, en partie du moins, relative aux contextes constitués par certaines des données dont on dispose).

Notons aussi qu'il n'est nullement certain qu'il soit permis d'appliquer les règles d'inférence les plus fondamentales sans tenir compte des déductions qui ont été effectuées précédemment.

Ainsi, supposons que la proposition B soit un théorème logique d'un système S. L'énoncé B est alors dérivable à partir de n'importe quelle suite d'énoncés, et en particulier, à partir de la suite nulle.

Mais si l'on déduit B à partir de la suite

$$B_1, .., B_n,$$

en tant que théorème du système S, on n'est en aucune façon autorisé à appliquer la règle (I ---)) successivement à B_n et à B, à B_{n-1} et à

Si B_n, alors B (10),

etc. En effet aucune des prémisses n'est utilisée lorsqu'on infère de cette manière B à partir de la suite $B_1, .. ,B_n$.

(10) Ou à

B_n ---) B.

Supposons maintenant que l'on dérive B à partir de A et B en se servant de la règle

$$\frac{A' \text{ et } A''.}{A''}$$

On fait alors usage de la prémisse A et B. Mais l'inférence de B à partir de la suite

$$(s''') \text{ A et B}$$

contient une déduction de B à partir d'une sous-suite (stricte) de (s'''), la suite nulle. L'inférence est par conséquent incorrecte et n'autorise pas l'application de la règle (I ---)) à A et B et à B.

Il est donc probable que la règle

$$\frac{A' \text{ et } A''}{A''}$$

n'est pas universellement valable (11).

III

Les restrictions imposées à l'application de la règle (I ---)) par Belnap et Anderson et aussi celles qui ont été mentionnées tout au début confèrent à la déduction une certaine dimension historique, bien qu'à un point de vue différent de celui dont il vient d'être question.

D'autres éléments propres à la déduction naturelle concourent à prouver que les inférences dépendent, dans une mesure qui n'est pas négligeable, de celles qui ont été effectuées antérieurement ou de certaines des données dont on dispose.

(11) Des remarques analogues pourraient être faites au sujet de la règle

$$\frac{A' \text{ et } A'',}{A'}$$

de la règle

$$\frac{A'}{A' \text{ ou } A''}$$

etc.

Si tout ceci est fondé, il convient de choisir adéquatement certains des énoncés A, B, etc. qui, substitués aux variables des théorèmes du système E' dont il a été question plus haut, transforment ceux-ci en des propositions fausses.

(A) Selon Belnap et Anderson [12], la règle

$$(\text{R1}) \qquad \frac{\begin{array}{l}\text{A ou B}\\ \text{non A}\end{array}}{\text{B}}$$

ne peut être appliquée que si les expressions A et B sont unies, dans la première prémisse, par l'opérateur de la disjonction intensionnelle [13]. Aussi, la règle (R1) ne figure-t-elle pas parmi celles du système E′ dont les formules moléculaires sont construites exclusivement au moyen des opérateurs de l'implication logique, de la négation, du produit et de la disjonction extensionnelle.

Mais il ne semble pas qu'il soit nécessaire, pour expliquer le fait que la règle (R1) ne soit pas universellement valable, de distinguer la disjonction intensionnelle de la disjonction extensionnelle.

L'inférence de B à partir de A ou B et de non A n'est interdite que dans des cas très particuliers : principalement, lorsque A ou B a été dérivé, d'une manière explicite ou non [14], à partir de A ou à partir de B.

Supposons que l'on ait déduit A ou B à partir de B. Si l'on infère ensuite

B à partir de A ou B et de non A,

on dérive en réalité

B à partir de B et de non A,

c'est-à-dire, une des deux prémisses, B, à partir d'elle-même et de l'autre prémisse, et l'on effectue de la sorte une déduction incorrecte. Au terme d'une telle inférence, on n'est pas autorisé à appliquer la règle (I ---)) à non A et à B.

Supposons maintenant que l'on ait dérivé A ou B à partir de A. La raison pour laquelle on n'est pas alors en droit de déduire B à partir de A ou B et de non A est la suivante : en introduisant la prémisse non A, on rend

(12) Cf. N. D. Belnap Jr « A Formal Analysis of Entailment », technical Report nº 7, Office of Naval Research, group Psychology Branch, Contract No. SAR/Nonr-609 (16), New Haven, 1960, p. 17-27 et 38-42.

(13) Cette prémisse est alors logiquement équivalente à

Si non A, alors B.

(14) A ou B est dérivé implicitement à partir de A (ou à partir de B) si, par exemple, A ou B est déduit à partir de A et C (ou à partir de B et C). Inférer A ou B à partir de A et C revient en effet à appliquer successivement la règle $\dfrac{\text{A}' \text{ et } \text{A}''}{\text{A}'}$ et la règle $\dfrac{\text{A}'}{\text{A}' \text{ ou } \text{A}'''}$.

caduque (ou on annulle) toutes les inférences que l'on a effectuées antérieurement à partir de A ou à partir de A et d'autres prémisses.

Si, après avoir prouvé (ou supposé) que l'énoncé A est vrai, puis dérivé A ou B à partir de A, on suppose que la proposition non A est vraie, on introduit une prémisse qui est fausse (ou une prémisse qui est fausse dans le cas où l'énoncé A est vrai) et l'on s'apprête à effectuer une déduction qui doit aboutir à un conditionnel irréel [15] (ou à un énoncé qui constitue un conditionnel irréel vrai sous supposition) [16].

Mais lorsqu'on effectue une telle inférence, on ne peut se servir ni de la proposition A ni d'énoncés qui sont des conséquences logiques de A et, éventuellement, d'autres propositions.

L'application de la règle (R1) n'est pas non plus autorisée quand les expressions A et B ont, respectivement, la forme

(1) a est P

et

(2) a est Q

et que

(3) a est P ou a est Q

a été dérivé précédemment à partir de

(4) Quel que soit x, x est P

ou à partir de

(5) Quel que soit x, x est Q.

Si, après avoir déduit (3) à partir de (5), on infère (2) à partir de (3) et de

(6) a n'est pas P,

on effectue une déduction de (2)

à partir de (5) et de (6)

qui est incorrecte : cette déduction contient en effet une inférence de (2)

à partir de (5)

qui peut être assimilée à une application de la règle

$$\frac{\text{Quel que soit x, x est B}}{\text{a est B}}$$

et qu'il est permis pour cette raison de traiter comme une inférence triviale.

(15) C'est-à-dire, à une proposition telle que

S'il avait plu, il n'aurait pas fait froid.

(16) A un conditionnel irréel dans le cas où l'on a démontré que l'énoncé A est vrai et à une proposition qui constitue un conditionnel irréel vrai sous supposition dans le cas où l'on a supposé que l'énoncé A est vrai.

Si, après avoir dérivé (3) à partir de (4), on déduit (2)

à partir de (3) et de (6),

on effectue également une inférence incorrecte. En effet, on introduit une prémisse, (6), qui est logiquement incompatible avec (4) et l'on rend de la sorte caduque la déduction effectuée antérieurement à partir de (4). En introduisant la prémisse (6), on s'interdit d'utiliser aussi bien (4) que (3).

(Notons que l'inférence suivante, dont on serait tenté de se servir pour démontrer que n'importe quel énoncé est dérivable à partir de A et non A est totalement incorrecte :

A et non A	1
A	2
A ou B	3
non A	4
B	5.

L'application de la règle (R1) aux propositions 3 et 4 est illégitime parce que la déduction de 4 à partir de 1 annulle l'inférence de 3 à partir de 2.

Par ailleurs, s'il semble permis de dériver

(7) A et non A

à partir de

(7′) A, non A

et

A (ou non A)

à partir de (7) ((7′) et (7) affirment en effet approximativement la même chose), il est plus que douteux que (7) ou (7′) puissent être utilisés comme prémisses de tout autre déduction.

Lorsqu'on a inféré successivement l'expression A et l'expression non A a partir de B (ou à partir de B, C, .. , D), on a prouvé que B est inconsistant (ou que B est logiquement incompatible avec C, .. ,D) mais on n'est pas autorisé à poursuivre la déduction en prenant (7) ou (7′) comme prémisses de nouvelles inférences).

La règle (R1) n'est donc pas universellement valable. Son application est néanmoins permise dans de nombreux contextes. Ainsi, quand A ou B et non A consistent en des théorèmes (non logiques) d'un système axiomatique, il est en général légitime de dériver B à partir de A ou B et de non A. (16a)

(16a) Lorsque A ou B et non A sont des théorèmes de ce genre, A ou B n'a pas été ordinairement inféré à partir de B.

Ce qui précède vaut aussi pour la règle

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Quel que soit x, x est P ou x est Q} \\
\text{(R2)} & \text{Quel que soit x, x n'est pas P} \\
\cline{2-2}
 & \text{Quel que soit x, x est Q}
\end{array}
$$

Son application n'est pas autorisée, notamment, lorsque la première prémisse a été déduite, d'une façon explicite ou non, à partir de

Quel que soit x, x est P

ou à partir de

Quel que soit x, x est Q.

Mais elle est généralement permise quand chacune des deux prémisses constitue une théorème d'une théorie mathématique.

(B) Il est bien connu que parmi les énoncés vrais, de nature empirique, qui ont la forme

Quel que soit x, si x est P, alors x est Q,

il en est qui établissent un lien de nécessité physique entre 'être P' et 'être Q', et d'autres qui n'unissent pas 'être P' et 'être Q' par un tel rapport.

Soit

(1) $(x)\ (Px\ I\ Qx)$ [17]

une proposition de la première espèce et soit

(2) $(x)\ (P'x\ I\ Q'x)$

un énoncé de la seconde espèce.

La proposition

(3) Qa

est dérivable à partir de (1) et de

(4) Pa,

même si (4) est un énoncé faux. Par contre, la proposition

(3′) $Q'a$

n'est pas déductible à partir de (2) et de

(4′) $P'a$

dans le cas où (4′) est un énoncé faux.

La proposition

(5) $\underline{Pa}\ I\ \underline{Qa}$

(Si a était P, a serait Q)

est une conséquence logique de (1) mais l'énoncé

(5′) $\underline{P'a}\ I\ \underline{Q'\ a}$

ne suit pas logiquement de (2).

(17) « I » pour « si, alors ».

Il en est ainsi pour la raison suivante :

La proposition (2) a été inférée (ou peut être dérivée) à partir des énoncés

(2a) (x) (P'x II x $= a_1$ v .. v x $= a_n$) [18]

et

(2b) Q'a_1 .. Q'a_n.

Si la proposition (4') est fausse et qu'on la suppose vraie, on introduit une prémisse qui est incompatible avec (2a) (l'individu ou l'objet a est en effet différent de chacun des a_1, .. , a_n) et de ce fait on rend caduque la déduction de (2) à partir de (2a) et de (2b). S'étant ainsi interdit de se servir de (2), on ne peut pas déduire (3') à partir de (2) et de (4') et on ne peut pas non plus inférer (5') à partir de (2).

L'énoncé (1) n'a pas été dérivé (et ne peut pas être déduit) à partir de deux propositions analogues à (2a) et à (2b). Il n'est donc rien qui défende d'inférer (3) à partir de (1) et de (4), même si l'énoncé (4) est faux, et il n'est rien non plus qui interdise de dériver (5) à partir de (1) [19].

(18) « II » pour « si et seulement si ». L'énoncé (2a) affirme que seuls les individus (ou les objets) a , .. , a_n possèdent la propriété P'.

(19) Notons encore ceci : Supposons que 01 sache que la proposition (2) est vraie. Supposons également que 02 ignore que cet énoncé soit vrai, qu'il ne connaisse pas la valeur de vérité de la proposition (4') et qu'il dispose d'informations (A, .. B) à partir desquelles il est à même de déduire (correctement).

(6) P'a I –Q'a.

Supposons enfin que 01 ne dispose pas des données A, .. , B.

Dans ce cas, 01, une fois mis au courant des informations A, .. , B, dispose de données par rapport auxquelles l'expression (6) n'est pas un énoncé correctement construit mais relativement auxquelles l'expression

(6') <u>P'a</u> I <u>–Q''a</u>

en est un.