Sur la systématisation et la démonstration d'Homère à Euclide.

Un phénomène tel que la géométrie d'Euclide pose le problème de la formation d'une structure qui permet le développement systématique d'un aspect de la donnée des sens. Comme ce développement en géométrie procède essentiellement par la formulation et la démonstration de théorèmes, supposons cette structure présente dès l'apparition de ces deux éléments. Ainsi pourrons-nous relier une tentative en vue d'élucider le problème de la formation d'une structure qui régit le processus de la systématisation à une recherche sur la formation de la formulation et de la démonstration en géométrie. L'histoire de celle-ci commence en Grèce avec Thalès, qui l'aurait importée d'Égypte (1). Mais, d'après les textes dont nous disposons, ni les Égyptiens ni même les Babyloniens n'ont formulé des théorèmes ou des démonstrations (2), bien que Proclus attribue à Thalès les théorèmes que dans chaque triangle isocèle les angles de la base sont égaux (3), que deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté et les angles adjacents égaux (4), que lorsque deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux, théorème qu'il n'a pas démontré scientifiquement (5). Il démontra, sans que nous sachions comment, que le diamètre bissecte le cercle (6) et enfin il fut le premier à inscrire un triangle rectangle dans un (demi)cercle (7). Remarquons qu'Hérodote situe l'origine de la géométirie, qui est selon lui l'arpentage, en Égypte (8). Or les textes égyptiens confirment l'existence d'une géométrie pratique (9). L'origine égyptienne de la géométrie grecque, qui est une géométrie théorique, pourrait donc être due à une interprétation inexacte

(1) Prochus, *in Euclid.* I, p. 65
(2) O. Becker, *Grundlag. d. Math.* p. 22
(3) Proclus, *ibid.* 250, 22
(4) *ibid.* 352, 14-18
(5) *ibid.* 299, 1-5
(6) *ibid.* 157, 10-13
(7) Diogenes Laërtius I, 24-25
(8) Hérodote II, 190
(9) Van der Waerden, *Ontw. wet.*, p. 36

du texte d'Hérodote. Pour la géométrie de Thalès, Proclus a consulté, directement ou par l'intermédiaire d'autres auteurs, un traité, probablement l'«Histoire de la Géométrie» d'Eudème, (un élève d'Aristote, auquel il se réfère [10]), dont l'auteur disposait de textes attribués à Thalès.

En effet Proclus nous informe du fait que Thalès n'employait point l'expression « angles égaux » mais « angles similaires » [10].

Admettons donc, jusqu'à la preuve du contraire, l'authenticité des informations de Proclus à l'égard de la géométrie de Thalès. Dès lors la formulation de théorèmes et leur démonstration sont une innovation grecque due à Thalès.

Comme ils apparaissent ensemble dès le début, supposons l'existence d'une relation entre la formation de théorèmes ou propositions générales et celle de la démonstration. Les premières projettent une condition et en expriment le résultat. Elles représentent donc du point de vue de la syntaxe le schéma des propositions conditionnelles : si une proposition p, alors une proposition q. Examinons la formation de ces propositions en choisissant des textes qui marquent la transition de la parataxe à l'hypotaxe ou subordination.

A cet effet nous avons traduit quelques vers remarquables de l'*Iliade* d'Homère (X, 220-6) : (a) Nestor, le cœur et l'ardeur virile m'incitent à pénétrer le camp des ennemis si proches, les Troyens. (b) Mais si un autre homme m'accompagnait, j'aurais le cœur plus confiant et plus hardi. (c) De deux hommes qui vont ensemble, l'un pense pour l'autre ce qu'il convient de faire. (d) Un seul, même s'il réfléchit, a la pensée plus courte, l'invention mince.

Nous avons traduit la proposition (b) comme une conditionnelle. Mais le grec est moins affirmatif à ce sujet. Le grec *εἰ*, que nous avons rendu par « si », semble être un locatif d'une racine pronominale « *o*- » et signifie « dans ce cas », « dans ces circonstances», «dans ceci» [11]. Le verbe « accompagnait », introduit par *εἰ*, est à l'optatif, mode dont la fonction la plus apparente est de formuler les souhaits et ensuite la possibilité, qui semble secondaire [12]. D'après son sens originel cette proposition est donc une indépendante, qu'on peut traduire ainsi : « Mais dans ces circonstances, qu'un autre m'accompagne ».

Le grec *εἰ* appelle donc l'attention sur un aspect de la réalité, notamment le danger, cause d'un manque de confiance et de hardiesse, qui incite le sujet à l'expression d'un souhait, dont la réalisation remplace cet aspect

(10) voir 3.
(11) R. Van Pottelbergh, *Over de Gesch. en de Bet. van de εἰ-zin* p. 11
(12) Humbert, *Syntaxe grecque*, p. 117

par un autre, plus positif et qui rend la réalité plus abordable, notamment une diminution du danger et par conséquence une confiance et une hardiesse plus grande. Comme Diomède parle à une assemblée qui délibère, l'aspect purement subjectif de souhait est moins important que celui de la possibilité, qui est présente dans l'aspect prospectif du souhait. Dès lors les paroles de Diomède n'ont plus de valeur parce qu'elles expriment un souhait du héro, mais le moyen de réaliser une circonstance, qui favorise une entreprise périlleuse laquelle engage la responsabilité de plusieurs.

La subordination remplace donc dans le cadre de l'aspect prospectif la valeur subjective de souhait par la valeur objective de la possibilité. Exprimant une possibilité, cette proposition, introduite par *εἰ*, ne renvoie plus à l'aspect de la réalité qui a incité au souhait, mais, délivrée de l'intervention à titre personnel du sujet, elle ira s'intégrer dans le contexte d'après la portée de sa signification. Comme elle exprime un moyen, se faire accompagner, en vue d'une fin, avoir le cœur plus hardi, exprimée par la proposition qui suit immédiatement, elle s'accordera avec celle-ci. La subordination ne fait donc qu'accentuer un lien qui existait déjà.

Comment expliquer ce lien?

Remarquons que chez Homère une expression telle que : « Si jamais j'ai recouvert pour toi (le dieu Apollon) un temple agréable, ... exauce mon désir, que les Grecs paient mes larmes de tes traits » ([13]) est une application particulière de : « Celui qui obéit aux dieux, ils lui prêtent l'oreille » ([14]), qui exprime un rapport analogue d'une manière générale et évidente. En effet le verbe « prêtent » est à l'aoriste dit gnomique, qui exprime une vérité reconnue.

C'est également le cas pour le verbe « pense » de la proposition (c), dont la première partie, textuellement : « deux allant ensemble », exprime la circonstance que Diomède vient de souhaiter ou la protase de la proposition (b). La suite de (c) décrit une circonstance reliée à la première comme résultat.

Nous avons donc :

proposition (b) : si p, alors q ;
proposition (c) : si p, alors r.

Si Homère avait ajouté une proposition (d') telle que : « si r, alors q », comme (c) et d') sont des vérités reconnues et évidentes, la proposition (b) aurait été démontrée.

Bien que Diomède veuille démontrer à l'assemblée des Grecs le bien-fondé de sa proposition, il n'y réussit pas dans le sens strict que nous venons

(13) Iliade, I, 37.
(14) ibid. 218

d'indiquer. En tous cas Diomède essaie de montrer que sa proposition est une application d'une structure analogue à celle des vérités reconnues et qu'en conséquence, elle en possède le même caractère indubitable.

Ces vérités reconnues semblent donc pouvoir jouer le rôle d'axiomes. Nous avons déjà appelé l'attention sur une caractéristique particulière de ces vérités reconnues, notamment la présence de l'aoriste dit gnomique, « temps » du verbe de la principale, qui indique que l'expression est universellement valable pour tous les temps. Seulement l'aoriste indicatif, qui est la forme de l'aoriste gnomique, constate un fait passé. Dès lors comment expliquer la valeur « intemporelle » de l'aoriste gnomique ? Remarquons que dans l'exemple : « Celui, qui obéit aux dieux, ils lui prêtent l'oreille », le verbe de la proposition relative est au subjonctif présent, qui exprime une éventualité générale située dans le présent-futur.

Par ce subjonctif l'auteur exprime donc qu'on peut s'attendre à voir des hommes, qui obéissent aux dieux. Mais l'obéissance est la cause de la complaisance des dieux. Ainsi, comme cette obéissance peut être envisagée pour le présent-futur, ceci est également le cas pour la complaisance.

Mais, dans l'exemple suivant, il n'y a ni subjonctif ni relation causale [15] : « Ils meurent également l'inactif et l'auteur de mainte prouesse». Or l'absence du subjonctif due à celle de la proposition relative n'implique point l'absence de l'élément qui permet l'emploi de ce mode. En effet « l'inactif » peut être n'importe qui, même une personne dont on ne soupçonne point l'existence, donc tout inactif éventuel, ce qui est précisément exprimé par ce subjonctif. Ainsi dans l'exemple suivant, la relative, dont le verbe est au subjonctif, explicite par une définition descriptive le sens du concept signifié par un tel substantif : [16] « Maintes fois une cité entière participa au sort d'un mauvais, (quelqu'un) qui commet une faute et trame des projets insensés ». Seulement remplacer « l'inactif » par une telle proposition relative n'introduit point la relation causale. Heureusement Homère lui-même nous donne la solution du problème. Il reprend notre exemple comme suit : [17] « Je dis que personne n'a fui son destin, ni le lâche ni le brave, dès qu'il est né». Le verbe de la dernière dépendante est au subjonctif. La condition humaine implique la mort. C'est donc la cause, qui est exprimée au subjonctif.

Ainsi la structure de la vérité reconnue semble être le résultat d'une interaction entre la possibilité de l'emploi du subjonctif éventuel et la relation causale. Mais quel est le sens de cette interaction entre deux

(15) *ibid.* IX 320.

(16) Hésiode, *Les Travaux et les Jours*, 240.

(17) *Iliade* VI, 488.

termes dont la signification est assez vague? Si on considère une personne ou un objet x dans le temps, x peut être représenté par une droite, ensemble continu de points ordonnés. Deux de ces points déterminent chaque fois un segment de la droite ou moment de x.

Disons que le moment x_m est antérieur au moment x_n, lorsque le premier point de x_m précède le premier point de x_n et que le dernier point de x_m précède le dernier point de x_n, mais non le premier.

Si x_m est antérieur à x_n, ce que nous représenterons comme T (x_m, x_n), ils forment un segment continu x_{mn}.

Les états de x ou les actions que x fait ou subit, seront représentés par les symboles f, g ... Nous supposons tout autre élément que x_m dans une proposition Px_m comme appartenant à f.

Dès lors nous pouvons considérer $T(fx_m, gx_n)$ comme le schéma d'une certaine phrase.

Si nous admettons que T (fx_m, gx_n)est vrai pour tous les x, nous savons qu'à un moment de la réalisation de f, g se réalisera.

On aura donc l'impression que la réalisation de f produit celle de g. Prenons l'exemple de la vérité reconnue : « Celui qui obéit aux dieux, ils lui prêtent l'oreille ». ([18]) Pour que cette vérité se vérifie, il faut obéir aux dieux jusqu'au moment où on commence à être écouté par eux. Ainsi la réalisation de « obéir aux dieux » produira celle de « prêter l'oreille ».

Mais avant que les dieux puissent prêter l'oreille, il faut formuler un vœu. En effet nous lisons : « Ainsi parlait-il en priant et Apollon lui prêta l'oreille » ([19]). Le moment de la première action est également antérieur à celui de la seconde. Mais ce cas n'est pas vrai pour tous les x. Quelqu'un qui par exemple ne vénère point les dieux, pourra prier tant qu'il voudra, ils ne l'écouteront pas.

Mais comment établir cette loi que T (fx_m, gx_n) est vrai pour tous les x? Mettons par induction.

Si $T(fx_m, gx_n)$ se trouve vérifié pour x_1, x_2 ... x_i ..., la probabilité de l'hypothèse que la réalisation de f produit celle de g augmente. Mais comme tous les x ne se trouvent point à notre disposition, cette probabilité ne deviendra jamais une certitude.

Dans la vérité reconnue que nous venons de citer, le verbe de la relative est au subjonctif éventuel. L'éventualité se fonde sur une prévision de la réalité, en partant d'observations antérieures; on s'attend à voir se produire un fait probable ou normal. Ceci semble bien correspondre à l'induction.

(18) *Iliade* I, 218.
(19) *ibid.* 43.

Or ce n'est que le verbe de la dépendante qui est au subjonctif éventuel. On s'attend donc seulement à voir des x qui réaliseront f et non à ce que réalisant f ils réaliseront g. En effet ceci est une certitude en soi-même. Mais pour que cette certitude se vérifie dans le futur, il faut des x futurs qui la réaliseront. Et on peut s'attendre à voir ces x, qui la réaliseront.

On peut donc s'attendre à voir des x qui réaliseront f et, comme la réalisation de f produit avec certitude celle de g, tous ces x réaliseront également g.

La certitude ne provient donc point d'une manière mystérieuse du fait que la raison continuerait en sens rectiligne un mouvement qui lui serait imposé par des vérifications répétées. La certitude est un fait avant que la raison pénètre l'inconnu.

Comment cette certitude est-elle donc possible?

Comme les vérités reconnues sont des lois qui régissent l'activité humaine, comparons-les avec les lois de la société.

Nous avons remarqué au sujet de la proposition de Diomède à l'assemblée des chefs que le mot grec *εἰ* attire l'attention sur un aspect négatif de la réalité en fonction de la phrase qu'il introduit et qui exprime le moyen pour réaliser l'aspect positif correspondant exprimé par la phrase suivante.

Nous nous trouvons donc en présence de trois éléments : l'aspect négatif de la réalité, le moyen et l'aspect positif comme fin à réaliser. Les vérités reconnues, lois de l'activité humaine, à l'aide desquelles Diomède veut démontrer le bien-fondé de sa proposition, réalisent une connexion certaine entre le moyen et la fin, qu'ils expriment eux-mêmes d'une manière générale. Par contre mainte loi de la société associe le moyen à l'aspect négatif.

Ainsi Solon légifère contre la passivité des citoyens qui par indifférence s'en remettaient au hasard des événements dans le cas d'une guerre civile : « Celui qui lors d'une guerre civile dans la cité ne prend point les armes avec un des partis, sera frappé d'atimie et n'aura pas de droit politique ». [20] Remarquons que le verbe de la dépendante est au subjonctif éventuel. La réalisation de celle-ci produit la réalisation du moyen ou sanction : « Ils frappèrent les stratèges d'amende, parce que, vendus, ils s'étaient repliés ». [21] Nous retrouvons ici la formule T (fx_m, gx_n), bien que à première vue on pourrait penser que les deux moments sont discontinus. En effet le verbe de la dépendante est à l'optatif de subordination secondaire, ce qui signifie qu'elle est l'expression d'une pensée se rattachant à la sphère du passé. On doit donc comprendre : « Ils frappèrent ..., parce qu'ils pensaient que ... »

(20) Aristote, *Constitution d'Athènes* VIII, 5.
(21) Thc. IV, 55.

Donc en principe, lorsque l'aspect négatif se réalise, la sanction se réalise. En fait elle se réalise partant du savoir des magistrats qui possèdent le pouvoir de réalisation. L'enchaînement de ces deux réalisations est donc dû à l'association de deux contenus dans la loi.

Quelle est la relation entre méfait et punition?

Dans la « Lex XII Tabularum », rédigée à Rome vers 450 avant J.-C., nous lisons les articles suivants : « Si on mutile un organe, on appliquera le talion, à moins que les partis aient conclu un accord » (22) ; « Si, avec la main ou un bâton, on rompt ou meurtrit l'os d'un homme libre, on paiera une amende de 300 pièces, d'un esclave, 150 pièces ». (23) Dans la loi du talion, méfait et punition sont identiques : f (mutiler un organe) $=$g (mutiler un organe).

Dans le deuxième cas, qui semble plus récent que le premier, l'argent joue un rôle primordial. L'organisation des éléments matériels et même moraux, qui implique l'existence d'un système complexe de relations déterminant la valeur relative de ces éléments, nécessite un dénominateur commun de ces valeurs, qui rend possible l'interprétation de ces éléments entre eux. A ce moment de la civilation romaine, ce dénominateur en grande partie est l'argent.

Ainsi « briser un os » peut être interprété en une somme d'argent, qui dédommagera la victime. Dans le premier cas, nous avions $f=g$. Mais dans le cas qui nous occupe, f doit subir une interprétation i avant que l'identité puisse être affirmée : $(f)\ i=g$.

La vérité reconnue : « Il ne vit pas longtemps celui qui combat contre les immortels » (24) semble une application de la loi du talion. En effet les hommes sont mortels, les dieux immortels.

Une lutte contre les dieux peut provoquer leur haine, non leur mort : « et il ne vécut plus longtemps, parce qu'il était odieux à tous les dieux immortels » (25). Par contre le résultat d'une lutte des dieux contre les mortels ne laisse aucun doute.

Mais nous pourrions parler d'une application « positive » de la loi du talion dans l'exemple suivant : « Celui qui obéit aux dieux, ils lui prêtent l'oreille » (26). En effet lorsqu'on écoute les dieux, ils vous écoutent. Mais comme l'action d'écouter des dieux a beaucoup plus de valeur que celle des hommes, ceux-ci doivent intensifier cette action et non seulement écouter, mais obéir, vénérer.

(22) Tabula VIII, 2.
(23) *ibid.*, 3.
(24) *Iliade* V, 407.
(25) *ibid.* VI, 139.
(26) *ibid.* I, 218.

Les exemples suivants sont des cas d'interprétation quantitative. « De deux hommes qui vont ensemble, l'un pense pour l'autre ce qu'il convient de faire. Un seul, même s'il réfléchit, a la pensée plus courte, l'invention mince ». ([27]) Pour augmenter le potentiel d'intelligence, on augmente le nombre d'hommes.

« Le travail de plus (d'hommes) est meilleur ». ([28])

« Lorsqu'ils sont en groupe, même les lâches ont du courage » ([29]). Donc « plus d'hommes travaillent » équivaut à « ils travaillent mieux ou le travail est meilleur » et « un groupe de lâches se bat » à « ils se battent courageusement ».

Examinons d'une manière plus générale les trois éléments : aspect négatif (-a), moyen (b) et aspect positif ou fin à réaliser (+a). Dans la proposition de Diomède -a vient en premier lieu et +a est une réaction en sens opposé partant de -a. Dans le cas des lois +a n'avait même pas de fonction explicite. Or avant de pouvoir nier a, il faut connaître a. Si nous supposons que -a est une déviation de la norme N dans un aspect n, la négation et l'opposé positif s'expliquent. Cette norme détermine l'état d'équilibre dynamique de la vie en commun, c'est-à-dire le fonctionnement normal d'une organisation, qui, par sa forme déterminée, s'est proposée comme but de fonctionner d'une manière déterminée. Maintenir le fonctionnement normal signifie donc le maintien de l'organisation. Une connaissance globale de ce but est possible par l'intermédiaire de la connaissance du sens de l'organisation exprimé dans sa forme et confirmé par la tradition. Il nous semble que la fonction d'une telle norme se retrouve dans celle du concept hindou « dharma » dont la racine « dhar » signifie : porter, maintenir et que J. Gonda qualifie de norme et d'équilibre fondamental. ([30])

« Dharma » indique la manière, le moyen par lequel le cosmos tout entier est maintenu (en existence). Le maintien du cosmos dépend de celui d'un certain équilibre cosmique. Cet état d'équilibre collectif est lié à celui des éléments individuels, qui possèdent leur propre « dharma », le « svadharma ». Le « dharma » humain régit toutes les actions humaines.

La connaissance du « dharma » est assurée par une tradition littéraire et la considération d'évolutions récentes, qui sont à tout prix considérées comme données dans la tradition.

Remarquons enfin que le droit relève également du dharma.

Comme ce concept de norme est l'élément essentiel de la cybernétique, nous renvoyons à celle-ci pour une compréhension plus rigoureuse. Re-

(27) *ibid.* X, 224.
(28) *ibid.* XII, 412.
(29) *ibid.* XIII, 237.
(30) *De Indische Gids*, 63, 1941, p. 553 ; Rocher, Tijdschrift V.U.B., I, 2-3, p. 161.

venons à notre position que +a, partant de -a, rejoint n de N. Ainsi dans le cadre de l'offensive des Troyens, Sarpèdon échoue dans son attaque contre le rempart des Achéens. Son « travail » est donc moins bien que ne l'exige le fonctionnement normal de l'offensive. Il fait donc appel aux lyciens et dit : « Le travail de plus est mieux ». Dans ce cas « Le travail est moins bien » indique l'état -a et « le travail est mieux » l'état +a, qui rejoint un aspect de N, le fonctionnement normal de l'offensive.

Donc -a est le résultat d'une déviation de n et +a celui d'une rétroaction ou rectification de -a dans le sens de n.

Comme résultats d'actions opposées, -a et +a s'opposent et c'est en s'opposant à -a que +a nie -a.

Cette opposition peut être celle de négation et affirmation et dans ce cas +a est indentique à n, comme dans l'exemple « Celui qui obéit aux dieux, ils lui prêtent l'oreille » où l'expression « les dieux ne prêtent point l'oreille » indique l'état -a, ou celle des contraires, tels que « moins » et « plus », qui déterminent le même contenu a. Dans ce cas « plus de a » indique n partant de « moins de a ».

Donc le signe « - » exprime une déviation de N et « + » une affirmation de N par opposition à « - ».

La réalisation de b, le moyen, devra produire la réalisation de +a. Dans nos exemples le moyen est exprimé par la dépendante « qui obéit aux dieux » et les termes « le travail de plus ».

La réalisation de +a s'accomplit par une rétroaction, mouvement dont le premier point se situe dans -a, mais annonce le dernier situé dans +a. Comme b par sa réalisation réalise ce mouvement de rétroaction, qui nie -a et s'oppose à -a, avant même que +a ne se réalise comme terme de ce mouvement, cette négation et opposition viennent de b. Or cette négation et opposition n'ont de sens, dans le cas de la réalisation de +a, que par le contenu, la signification de +a. Et en effet l'identité b=+a donnerait une certitude absolue pour la réalisation de +a.

Mais dans ce cas la réalisation de +a se ferait par +a (=b) partant de -a. En effet comme la réalisation de +a (=b) ne produirait non seulement la réalisation du mouvement de rétroaction, mais s'identifierait à celui-ci, ce mouvement partant de -a situerait un point de +a (=b) dans -a, ce qui est impossible.

Donc une personne x dans un état -a ne peut réaliser l'état +a en faisant appel, partant de son état -a, à b=+a ou b=(+a)i.

Il reste donc que b=-a, b=(-a)i ou que b n'a rien en commun ni avec -a ni avec +a. Les deux premiers cas sont impossibles, puisque la rétroaction exige le signe « + ». Dans le troisième cas b est compatible avec -a et +a, c'est-à-dire qu'on pourrait affirmer la vérité de l'ensemble : « -a est vrai et $+a$ est vrai et b est vrai », ce qui est impossible, car l'affirmation de -a exclut celle de $+a$ et vice versa. Ainsi il nous faut supposer que b ne se réalise point dans x, donc partant de -a, mais dans y. Ainsi « plus » ne se réalise point dans le travail, mais dans les travailleurs.

Or b doit réaliser $+a$ dans x. Ceci est possible, si b exprime une relation entre y et x, telle que y « fait » b « sur » x. Dans notre exemple : « plus de travailleurs font le travail ». Du point de vue de x, cette expression signifie que x « est fait » de « b » par y, donc : le travail est fait par plus de travailleurs. C'est-à-dire que b se réalise d'une certaine manière dans x et réalise donc un certain état de x.

Cette manière de réalisation et donc cet état réalisé est catactérisé par le signe « + », qui nie et s'oppose à-a. Donc cette manière de réalisation est caractéristique pour la réalisation de $+a$. L'état réalisé est donc $+a$.

En effet, comme -a est un état de x, la réalisation de b dans y doit réaliser un état de x éliminant l'état -a.

Et nous avons vu que cette élimination procède par négation de et opion à -a, ce qui implique l'état $+a$ ou l'interprétation de b dans x.

Exprimons notre conclusion en termes f et g.

Lorsque fy_0 implique par f une relation entre y_0 et x_0 telle que par cette relation x_0 est dans un état tel que gx_0, et $f=(g)i$, f est le moyen qui produit g, c'est-à-dire que f est la cause de g.

Dans quel sens se fait cette interprétation i?

Admettons que y et x appartiennent à une classe H, par exemple la classe des hommes, dans laquelle est inclue une classe F. Ainsi sous certaines circonstances il est possible que y aussi bien que x possède la caractéristique f de la classe F. Donc y et x acceptent tous deux l'état f. Mettons que f implique une relation entre deux termes. donc que f se réalise dans y sur x : f (y, x). Ainsi x se trouve dans un certain état $\bar{f}$ (x, y). Si $f=(\bar{f})i$, i signifie l'éloignement du signe « - » de $\bar{f}$, donc f. C'est-à-dire que nous pouvons exprimer l'état de x en termes de f comme suit : f(x,y), qui est la forme de la loi du talion : si y fait f sur x, x fait f sur y. La justice réside dans l'identité des deux actions.

Dans le cas où y appartient à la classe des hommes et x à celle des dieux, qui est plus puissante que le première, il suffit que y riposte par une action g qui, en valeur humaine, est « moins » que f de x. Donc $f=(g)i$ signifie f= « plus que » g, où f des hommes égale g des dieux. Enfin x et y appartiennent à deux classes différentes, y à celle des hommes et x à celle des produits humains réalisés dans les hommes ou les choses. Ces produits, comme manières d'existence des hommes ou des choses, s'expriment qualitativement, mais comme réalisés dans les hommes ou les choses partant des hommes, existant eux-mêmes dans l'espace, ils sont susceptibles à une interprétation quantitative. Dans ce cas il suffit de dire que i exprime la quantification par rapport à y.

Ainsi la certitude que la réalisation de f produira celle de g réside dans le fait que la réalisation de g est une interprétation de la réalisation de f dans x. Mais l'action f de y doit pouvoir porter sur x, ce qui est exprimé par la formule T (fx_m, gx_n), bien qu'elle soit fausse en ce qui concerne l'antériorité, puisque g est une interprétation de f. Et en effet, dans les vérités reconnues, qui expriment gx_0 par un aoriste gnomique, il est clair que, partant de cet aoriste, gx_0 n'est point exprimé comme une durée.

Cette certitude s'exprime par une projection de f, et donc de g, dans l'inconnu, le futur. Sans cette projection on ne pourrait exprimer une loi universelle. Comme on s'attend en premier lieu à voir des hommes, cette projection est basée sur la répétition de la relation de parents à enfants. Cette répétition n'est possible que dans le cas de la présence de qualités héréditaires, par exemple le pouvoir d'engendrer qui est celui des parents. Dans ce cas les enfants pourront être parents à leur tour. Une de ces qualités héréditaires est également le pouvoir de faire f, puisqu'on prévoit des hommes, qui feront f, comme leurs ancêtres.

Ainsi la formation d'une loi universelle dépend de la présence d'une relation qui rend compte de l'existence des objets auxquels la loi s'applique, qui assure le maintien des qualités fondamentales, qui caractérisent ces objets en tant qu'arguments de cette relation et qui, en plus, rend probable l'existence de ces objects, avec le maintien de leurs caractéristiques, au delà de l'expérience. Cette relation procède à la standardisation d'existants, trame d'une systématisation du réel, systématisation qui se réalise par l'interprétation i.

Ainsi la systématisation dans la Théogonie d'Hésiode repose-t-elle sur cette relation, que nous nommerons relation ancestrale.

En effet, partant de Chaos les dieux naissent les uns des autres. Ces dieux sont une interprétation d'éléments naturels sous une forme humaine. Partant de cette forme la relation ancestrale s'applique à et rend compte de l'existence de ces éléments, de leur caractéristique constante héréditaire, ainsi que de l'hiérarchie des caractères spécifiques. Or il est clair que l'interprétation chez Hésiode n'est plus entière : « Dites comment naquirent les dieux et la terre et les fleuves et la mer immense, qui s'èlance en gonflant ses vagues, et les astres resplendissants et, au-dessus, le large ciel . . . » (31).

Et pourtant la terre, Gaia, est une déesse qui parle et se réjouit dans

(31) Th. 108.

son cœur [32], bien que : « Célébrez la race sacrée des immortels, qui sont toujours et qui naquirent de Gaia et Ouranos (le ciel) étoilé » [33].

Ce n'est que partant des Titans, entre autres Zeus, que l'interprétation est entière. Il nous semble donc que les divinités précédant Zeus n'avaient plus de fonction réelle dans la religion de ce temps et que leur caractère divin s'est fané au profit de ce qu'elles interprètent. Ainsi la laïcisation du mythe se prépare.

La suppression du caractère divin, qualité héréditaire, supprimerait la relation ancestrale et ainsi la hiérachie des éléments, qui, en reconstruant le monde, imposait une place bien définie et donc une forme définie à chaque élément. Donc par la suppression du divin, les éléments ne se présentent plus ordonnés dans le temps et d'après leur fonction, mais amassés dans l'espace actuel auquel se limitent, vu la suppression du temps, les possibilités d'une interprétation qui devra systématiser cet amas.

La génèse de b étant une interprétation de b en a, elle suppose la présence simultanée, du moins en principe, de a et de b. En effet le devenir conçu dans l'espace se présente comme un mouvement du point a vers le point b. Ainsi aucun élément, vue l'homogénéité de l'espace, ne pourrait causer une mutation de a dans son mouvement vers b et de b vers c etc., ce qui signifierait la fin du pouvoir générateur et donc du devenir. En effet b et c n'ont point de pouvoir d'action génératrice qu'en tant qu'ils sont a. On effectue donc partant de a une opération de translation, qui engendre la symétrie dans un ensemble infini en faisant correspondre à un point donné un nombre infini de points homologues.

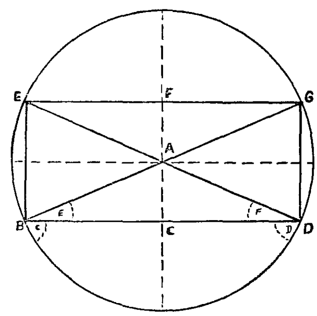
Supposons donc que chez Thalès l'interprétation, s'effectuant dans le mouvement du devenir, obéit aux exigeances de la symétrie.

Cette supposition ne vaut non seulement pour Thalès, mais également pour son « successeur » Anaximandre, qui fait naître les qualités contraires, symétrie d'ensembles finis, de l'infini, donc dans un cadre spatial (F. d. V., BI).

Cette vision spatiale, soumise aux exigeances de la symétrie, de Thalès et de ses successeurs peut, sous certaines conditions, garantir une activité créatrice dont le résultat est la géométrie.

O. Becker signale l'importance du rôle de la symétrie dans les théorèmes de Thalès, qui peuvent être constatés d'après les axes de symétrie dans la figure suivante [34] :

(32) Th. 173
(33) Th. 105
(34) *Das math.Denken der Antike*, p. 39



Examinons plus spécialement le théorème que dans chaque triangle isocèle les angles à la base sont égaux (similaires).

Ainsi à l'égalité (f) de deux côtés d'un triangle (y) correspond la similarité (g) des angles à la base (x).

La réalisation de f dans y produit avec certitude celle de g dans x. Disons donc que g est une interprétation de f dans x. Quel est le rapport entre y et x? Pour pouvoir répondre à cette question il faut savoir si Thalès a pu concevoir un rapport entre deux éléments différents d'une même figure, comme deux côtés et deux angles. Comme il emploie l'expression « angles similaires », Thalès ne conçoit point l'angle comme une quantité. Si x est une manière d'être de y telle que l'inclinaison des droites en rapport à un plan horizontal, dans ce cas la base, x est une interprétation de y dans le triangle. En tant que y produit le triangle, y produit x.

Heath [35] affirme que cette conception de l'angle dans l'expression « angles similaires » est apparantée au se-qet égyptien, qui indique l'inclinaison, la pente des faces d'une pyramide. Nous lisons dans le papyrus Rhind [36], problème 36 : « Exemple pour le calcul d'une pyramide. 360 est le côté de la base, 250 la hauteur ; donnez la pente (se-qet) ».

Dans la solution on divise 180, la moitié de la base, par 250, la hauteur. Le se-qet est o,72. Le se-qet indiquait donc la manière pour construire la pente. En effet, si les pierres avaient une hauteur de I, chaque assise reculait de o,72 vers l'axe de la pyramide. Ainsi le se-qet résultait dans la construction de côtés égaux réalisant des inclinaisons similaires.

En tant que les côtés égaux réalisaient la forme triangulaire, la base étant toujours donnée, ces côtés avaient des inclinaisons similaires. Ainsi la similarité était l'interprétation et le produit de l'égalité des côtés dans le triangle.

(35) H. G. M. I, 131
(36) Vander Waerden, p. 36

Cette observation exigeait une vision spatiale où côtés et angles étaient donnés comme expressions d'un même facteur, le se-qet.

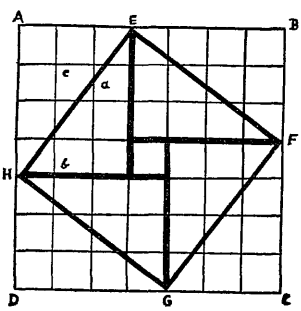
Examinons du même point de vue la géométrie hindoue dans l'Apastamba- — Sulva — Sutra (5me ou 4me siècle avant J.-C.) ([37]).

Le seul théorème, proposition générale, que nous trouvons est celui de Pythagore : « La diagonale d'un rectangle produit la somme de ce que le côté plus long et le côté plus court produisent (I, 4) ».

Remarquons qu'il n'y a pas de démonstration.

Dans un ancien traité chinois de Chou Kung (mort en 1105 avant J.-C) nous trouvons l'affirmation que la diagonale du rectangle (3,4) est 5 et une règle pour trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle partant des côtés ([38]) En admettant une influence chinoise sur la géométrie hindoue, l'énonciation de la proposition générale pourrait s'expliquer partant de cette règle chinoise.

Dans le calendrier chinois Chou-pei Suan-chin se trouve une démonstration du théorème de Pythagore pour le cas classique 3, 4, 5. ([39])



On retrouve cette figure dans la démonstration du théorème par l'hindou Bhaskara, qui naquit en 1114 après J.-C. et vécut donc avant que les Éléments d'Euclide firent leur apparition par l'intermédiaire de la traduction arabe de Nasir eddin Mohammed Ben Husain Al Thussi, qui vécut de 1201 à 1274 après J.-C. ([40]).

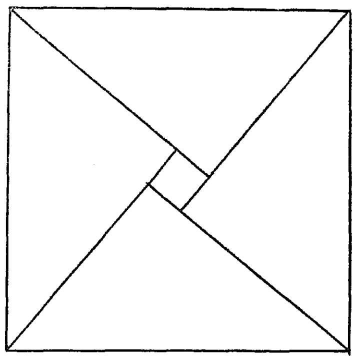
Dans cette figure $c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a\text{-}b)^2 = a^2 + b^2$.

(37) Heath, *Eucl. El.* I. p. 362

(38) *ibid.* p. 360.

(39) *ibid.* p. 355.

(40) Rocher, *Journal of the oriental institute*, III, 3, March, 1954.



Ainsi pouvons nous supposer que le théorème de Pythagore dans le Sulva - Sutra reposait sur l'expression des superficies en nombres, connus ou inconnus.

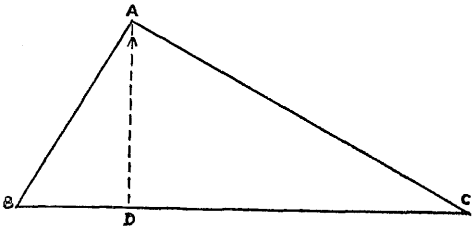
Interprétons le théorème comme suit : f dans y (la diagonale d'un rectangle) produit par interprétation g_1 et g_2 dans, respectivement, x_1 et x_2. Donc g_1 et g_2 sont une expression de f de y dans les côtés x_1 et x_2. Quel rapport exprime-t-on ainsi entre x_1, x_2 et y?

Aucun, puisque partant des nombres indiquant la superficie on trouve des nombres tels que 3, 4, 5 pour x_1, x_2, y, en tant que droites, mais non en tant qu'éléments d'un certain triangle. Remarquons que rien n'empêche qu'on puisse combiner les surfaces d'une telle manière que l'identité $a^2 + b^2 = c^2$ est évidente.

Comme il nous semble que l'interprétation est le seul élément qui manque, supposons que la possibilité d'une démonstration dépend de celle d'une interprétation.

Admettons que l'interprétation est possible. Dans ce cas $f = (g_1)i$ et $f = (g_2)i'$ et donc $(g_1)i = (g_2)i'$. Ainsi $f/g_1 = i$ et $f/g_2 = i'$. Si nous pouvons déterminer s et t tels que $f/g_1 = g_1/s = i$ et $f/g_2 = g_2/t = i'$,alors $f.s = (g_1)^2$ et $f.t = (g_2)^2$. Donc si $t + s = f$, $f^2 = (g_1)^2 + (g_2)^2$.

C'est en substance la démonstration par proportion, qui fut selon Heath la démonstration que donna Pythagore ([41]).



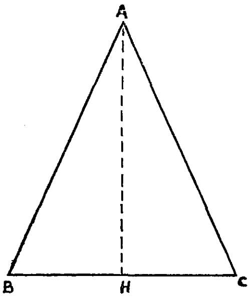
(41) *Euclid's El.* I p. 353

Partant de la similarité des triangles ABC, DBA, on démontre que le rectangle CB, BD est égal au carré de BA. De même pour les triangles ABC, DAC à l'égard du rectangle BC, CD et le carré de CA.

Dans ce cas l'interprétation i est basée sur la similarité des triangles qui manifeste un rapport entre y et x_1, x_2 en tant qu'éléments du triangle qui permettent une expression quantitative. En effet, la valeur quantitative f de y s'exprime par interprétation dans x_1 et x_2. Reprenons le problème du théorème de Thalès.

De quelle interprétation pouvait-il disposer, s'il est vrai, qu'il a démontré des théorèmes, comme la tradition l'affirme.

Nous avons déjà signalé que la symétrie semble jouer un rôle important dans ses théorèmes. L'égalité des côtés et la similarité des angles sont l'expression d'une même symétrie, c'est à dire qu'ils sont déterminés partant du même axe de symétrie AH.



La superposition de AB et AC, garantie par leur égalité, est également une superposition de $\hat{C}$ et $\hat{B}$, qui sont donc égaux ou similaires. En tant qu'éléments du triangle ABC l'égalité de AB et AC est déterminée par l'axe AH, qui détermine également $\hat{B} = \hat{C}$.

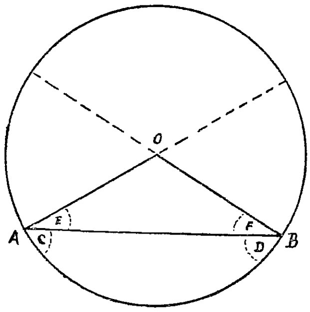
Ainsi l'égalité de $\hat{C}$ et $\hat{B}$ est une expression ou interprétation de AB = AC partant de l'axe AH.

Ainsi pouvait-il démontrer ses autres théorèmes à l'exeption de celui que, lorsque deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux. En effet, dans ce cas la superposition n'était garantie que par l'égalité même des angles.

Thalès aurait donc appliqué l'axiome 5 d'Euclide : « les choses, qui coïncident, sont égales.»

Nous retrouvons chez Aristote (42) une démonstration de ce même théorème, concernant le triangle isocèle :

(42) An. pr. 41 b 15-20



Comme $\hat{A}$ (= $\hat{E}$ + $\hat{C}$) et $\hat{B}$ (= $\hat{F}$ + $\hat{D}$) sont des angles d'un demi-cercle, $\hat{A}$ = $\hat{B}$. $\hat{C}$ et $\hat{D}$, qui sont les angles d'un même segment, sont également égaux. Ainsi $\hat{A} - \hat{C} = \hat{E}$ et $\hat{B} - \hat{D} = \hat{F}$. Donc $\hat{E} = \hat{F}$.

Les éléments donnés du triangle sont interprétés comme éléments donnés du cercle. AO et BO sont égaux comme rayons du cercle. AB est la corde d'un segment du cercle. En même temps ils forment côtés et base du triangle. Ainsi ils déterminent $\hat{E}$ et $\hat{F}$ dans le triangle et dans le cercle. C'est-à-dire que les angles sont considérés comme des quantités. En effet la démonstration s'effectue par l'intermédiaire de l'axiome 3 d'Euclide : si on retranche des parts égales de quantités égales, les restes sont égaux.

Euclide démontre ce même théorème d'une manière peu différente. Il évite par une construction, à l'aide de droites, les angles formés par une droite et une courbe.

Ainsi dès le début la possibilité de la démonstraton remonte à celle d'une interprétation d'un état de certains éléments en termes de l'état fonctionnel, si non productif, d'élements donnés.

En effet, l'élément donné joue un rôle constructif dans la figure donnée. De ce fait il détermine l'état d'autres éléments appartenant à cette figure. Une interprétation de cet état en termes de l'état de l'élément producteur assure avec certitude l'existence et la forme de l'état produit.

Cette interprétation est basée depuis Pythagore sur l'aspect quantitatif de tous les éléments géométriques. Ainsi l'état du producteur et du produit possèdent un dénominateur commun résidant dans la possibilité de quantification.

L'aspect de production d'un élément d'une figure donnée se réduisait à l'interprétation pure et simple.

Rechercher cette interprétation était démontrer.

Cette recherche était telle que l'élément donné était, sans que sa fonction première ne se perdît et que sa valeur propre ne change, interprété dans une fonction nouvelle et ainsi de suite jusqu'au terme de l'interprétation. En certain cas l'interprétation passant par un même axe de symétrie était indispensable.

A un certain moment, l'existence et la standardisation des figures et de leurs éléments étaient déterminés explicitement par la possibilité de construction au moyen de la règle et du compas.

Un phénomène similaire se produit dans la philosophie.

En effet, Parménide, continuant la tradition partant de Thalès, reconstruit la vraie réalité par une conception spatiale et rigoureusement symétrique. L'Être est conçu comme une sphère (sans l'être explicitement) ([43]).

Les pensées sont des interprétations en termes de l'Être : le même est penser et être » ([44]) et « le même est être et la pensée « est » ([45]). Zénon, élève de Parménide, tire la conséquence de cet Être réalisé dans une vision spatiale par son maître en affirmant que l'Être est une quantité ayant un volume ([46]). Ainsi tout ce qui n'avait point de volume n'était pas. C'est sur cette base, la quantité, que Zénon fonda ses démonstrations. En tant que l'objet indiqué par un concept pouvait être interprété en termes quantitatifs, il était. Cette évolution aboutit, sous l'influence de la classification dans l'arithmétique des concepts déterminant une certaine extension, au syllogisme d'Aristote, qui interprétait un concept en termes d'un autre se basant sur le rapport de leurs extensions.

A. Phalet.

Bibliographie

W. Aly, Hesiods Theogonie, Heidelberg, 1913.
E. W. Beth, De Wijsbegeerte der Wiskunde, Antw., 1944.
I. Burnet, Early Greek Philosophy, London, 1948.
F. De Raedemaeker, De Philosophie der Voorsokratici, Antwerpen, 1953,
H. Diels-W. Kranz, Die Fragmente der Vorsokratiker I, II, III Berlin, 1960 (F. d. V.)
J. Grooten-G. J. Steenbergen, Filosofisch Lexicon, Antwerpen, 1958.
T. L. Health, The thirteen Books of Euclid's Elements, I, II, III New York - London.
S. H. Hooke, Middle Eastern Mythology, 1963.
J. Humbert, Syntaxe grecque, Paris, 1954.

(43) F. d. V. B8, 30-1.
(44) *ibid.* B3
(45) *ibid.* B8, 34.
(46) *ibid.* B1, 12-7.

A. Lalande, Vocabulaire technique et critique de la philosophie, Paris, 1956.
H. C. Liddell - R. Scott, Greek-English Lexicon, Oxford, 1956.
G. Mathieu - B. Houssaullier, Aristote. Constitution d'Athènes, Paris, 1952.
J. Nicod, le problème logique de l'induction, Paris, 1961.
J. Nicolle, La symétrie, Paris, 1957.
Roscher. Ausführliches Lexicon der Griechischen und Römischen Mythologie, Leipzig, 1916-24.
P. Tannery, La géométrie grecque, Paris, 1887.
I. Thomas, Selections illustrating the History of Greek Mathematics, I, II, (Loeb), London-Cambr., 1957.
B. L. Van der Waerden, Ontwakende wetenschap, Groningen, 1950.
R. Van Pottelbergh, Over de Geschiedenis en de Betekenis van de εἰ-zin in het Grieks, Gent, 1939.